INSA Institut National des Sciences Appliquées Rennes

Département de Mathématiques

Année universitaire 2023/24
2ème année **Analyse 3**
Liste 5: Fonctions à plusieurs variables

Lignes de niveaux, continuité

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D, le dessiner dans $\mathbb{R}^2$, vérifier si la fonction est continue sur son ensemble de définition et tracer l'allure des ensembles de niveaux $f(x, y) = c$ pour les valeurs de c indiquées.

1. $f(x, y) = y^2, \quad c = -1, 0, 1, 4.$
2. $f(x, y) = \frac{1}{2}x + y, \quad c = -2, -1, 0, 1, 2.$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1), \quad c = -100, 0, 2.$
4. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}, \quad c = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$

Exercice 2

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et (x_0, y_0) donné. On suppose que les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont continues en x_0 et y_0. Cela implique-t-il que f est continue en (x_0, y_0) ?
2. Étudier, en utilisant la **définition**, la continuité en $(0, 0)$ de

$$f(x, y) = |1 + x + y| \quad \textit{[majorer } |f(x, y) - 1| \textit{ en observant que } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\textit{]},$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Exercice 3 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1/2 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Dérivées partielles

Exercice 4

1. Montrer, en utilisant la définition, que $f(x,y) = xy$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les dérivées partielles, là où elles existent, de

$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\ ; \qquad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Déterminer une équation du plan tangent en $M_0\,(1,2)$ à la surface d'équation cartésienne

$$z = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

4. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $h\,(t) = f\,(t, g\,(t))$. Calculer $h'(t)$ et $h''(t)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f, de $g^{'}\,(t)$ et $g''\,(t)$.

5. Soit $\varphi(t) = f(2t, -t)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $(0,0)$. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 5 Calculer les dérivées partielles premières là où elles existent et étudier leur continuité.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \Delta = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}, \\ x \arctan\frac{y}{x} & \text{si } (x,y) \notin \Delta. \end{cases}$

Exercice 6 Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$?

Changements de variables
et équations aux dérivées partielles (EDP)

Exercice 7 Soit f une fonction de deux variables. Résoudre les EDP :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Exercice 8 Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère la fonction $F :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

1. Déterminer $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$.

2. Soit $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$. Résoudre l'EDP $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur Ω en passant en coordonnées polaires.

3. Calculer le Laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de f en cordonnées polaires.

4. Trouver les solutions radiales de l'EDP de Laplace $\Delta f = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On effectue le changement de variables

$$u = x + ay, \qquad v = x + by$$

de sorte que $f(x,y) = F(u,v)$.

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que ce changement de variables soit acceptable ?
2. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F.
3. En utilisant $a = -1$ et $b = 1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
4. En utilisant $a = 1$ et $b = -1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
5. En utilisant $a = 0$ et $b = 1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Extrema libres et liés, optimisation

Exercice 10 Trouver les points critiques des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$ et, dans chaque cas, indiquer s'il s'agit d'extréma locaux.

$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2, \quad f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$

Exercice 11 Soit $K = [0,1] \times [0,1]$ et f la fonction définie sur K par $f(x,y) = x - y + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global de f sur K.
2. Étudier les extrema globaux et locaux de f sur K.

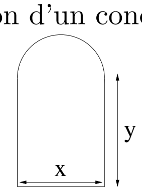
Exercice 12 Soit $f(x,y) = xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f.
2. Étudier les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Même question pour les extréma de f sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 4$.

Exercice 13 Trouver la distance (la plus courte) dans le plan du point $(1,2)$ à la droite d'équation $2x + 3y = 1$.

Exercice 14 En utilisant une quantité α d'aluminium, concevoir la boîte de conserve (un cylindre) ayant un volume V maximal, sachant que le fond et le dessus doivent avoir double épaisseur.

Exercice 15 (DS janvier 2012) La section d'un conduit d'air a la forme suivante



Pour optimiser le coût de construction, celui-ci doit avoir le plus petit périmètre possible sachant que, pour des raisons de fonctionnement, l'ouverture doit avoir une aire égale à c. Déterminer les dimensions x et y du rectangle de manière à optimiser le coût.

Exercice 16 Trouver les dimensions du cylindre de volume maximal qui peut être contenu dans une sphère de rayon R.

Exercice 17 Une entreprise chauffe ses locaux de la façon suivante : sur une période de 24h, par tranches de 8h, une chaudière chauffe avec une température constante,

T_0 de 9h à 17h (occupation des locaux), T_1 de 17h à 1h, T_2 de 1h à 9h.

Si la chaudière est maintenue à une température constante T pendant une tranche de 8h, la température y des locaux à la fin de la tranche est donnée par la relation

$$y = bx + (1-b)\,(aT + (1-a)S)\,,$$

où x est la température des locaux au début de la tranche horaire, S est la température extérieure (pour simplifier, on la supposera fixée une fois pour toute) et $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ sont des paramètres fixés. En particulier, si T est choisie telle que $y = x$ alors la température reste constante pendant les 8h considérées. Le coût du chauffage pendant cette tranche est donné par

$$\alpha(T-S)^2$$

où $\alpha > 0$ est une constante fixée (on pourra la prendre égale à 1 dans la suite).

1. Supposez que vous êtes le responsable du service gestionnaire. Votre objectif est de déterminer le plan de chauffage optimal (minimisant le coût) sur 24h afin que, pendant la période d'occupation des locaux, la température ambiante garde une valeur x_0 prescrite.

1.a. Comment doit être choisi T_0 pour que la température des locaux, étant à x_0 à 9h, reste constante de 9h à 17h ?

1.b. Quelle relation doivent alors vérifier T_1 et T_2 pour que la température revienne à x_0 après un cycle de 24h ?

1.c. Déterminer le programme optimal.

1.d. Application numérique : $a = 2/3$, $b = 1/4$, $S = 0°$, $x_0 = 20°$.

2. (facultative) Pour des raisons d'économie, le PDG décide de réduire subitement le budget de chauffage, c'est-à-dire qu'il fixe un coût, moindre que le précédent, et vous devez faire avec. Votre objectif est maintenant de maximiser la température x_0 des locaux pendant la période d'occupation avec les moyens dont vous disposez. Quel est le nouveau programme optimal ?

Application : $a = 2/3$, $b = 1/4$, $S = 0°$, budget de 1600 (baisse $\approx 30\%$ par rapport à 1).

DS ANALYSE 3 — janvier 2023 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits. Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement

Exercice 1. Soit f une fonction 2π-périodique, définie par : $\forall t \in]-\pi, \pi]$, $f(t) = \sin(t/2)$.

1.1. Justifer l'existence du développement en série de Fourier associé à f et déterminer la relation qui existe entre la fonction f et sa série de Fourier qu'on notera $S(f)(t)$.
1.2. Déterminer les coefficients de Fourier a_n pour $n \geq 0$ et b_n pour $n \geq 1$ et la série de Fourier $S(f)(t)$.
1.3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.

Exercice 2.
2.1. Déterminer, puis représenter le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ et les lignes de niveau $L_c(h)$, pour $c = 0$, et $c = 1$, de la fonction h définie par : $h(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$.
2.2. Déterminer, puis représenter, le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par : $f(x, y) = \dfrac{\ln(y + x)}{\sqrt{x^2 - y}}$.
2.3. Calculer le gradient de la fonction f en tout point (x_0, y_0) de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et donner l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

2.4. Résoudre pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = x^2 - y^2$ à l'aide du changement de variable $(u, v) = (x + y, x - y)$, la fonction inconnue g étant de classe C^2.

Exercice 3.
3.1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = xy(x + y - 1)$.
Déterminer sur $\mathbb{R}^2$ les points critiques de h et discuter leur nature (extremum local, point selle, etc).
3.2. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x, y) = xy$ et $g(x, y) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{5}$. Déterminer, à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, les solutions du problème: Minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

Exercice 4. *L'exercice 4 de janvier 2023 n'est plus au programme, on le remplace par celui de 2022.*

3.1. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = (x^2 + y^2)\exp(-y)$. Déterminer sur $\mathbb{R}^2$ les points critiques de h et discuter leur nature (extremum local, point selle, etc.).
3.2. On considère maintenant sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = 4y^2 - x^2 - 4$. Déterminer les solutions du problème Minimiser $\{f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0\}$
à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.