

# Quelques résultats d'unicité pour l'équation du mouvement par courbure moyenne dans $\mathbb{R}^N$

Guy Barles<sup>(1)</sup>, Samuel Biton<sup>(1)</sup> et Olivier Ley<sup>(1),(2)</sup>

**Résumé.** Récemment, Ecker et Huisken ont démontré que l'équation du mouvement par courbure moyenne des graphes dans  $\mathbb{R}^N$  admet au moins une solution régulière pour toute donnée initiale dans  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$  sans imposer aucune condition sur son comportement à l'infini. Le but de cet article est de décrire quelques résultats d'unicité pour ces solutions. La difficulté pour obtenir une telle unicité provient de l'absence de restriction sur la croissance et, plus généralement, sur le comportement des solutions à l'infini.

**Mots clés.** Équations quasilineaires paraboliques, mouvement par courbure moyenne, résultat d'unicité, solutions sans comportement prescrit à l'infini, solutions de viscosité.

**Abstract.** Recently, Ecker and Huisken proved that the equation for the motion by mean curvature of graphs in  $\mathbb{R}^N$  has at least a classical solution for any initial data in  $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$  without imposing any condition on its behavior at infinity. The aim of this article is to describe several results concerning the uniqueness of such solutions. The main difficulty to obtain such uniqueness results comes from the lack of restriction on the growth and, more generally, the behavior of the solutions at infinity.

**Key words.** Quasilinear parabolic equations, motion by mean curvature, uniqueness results, solutions without prescribed behavior at infinity, viscosity solutions.

**AMS classifications.** 35K55, 35A05, 35B50, 35K15, 53C44

## 1 Introduction

Dans une série de travaux récents, les géomètres Ecker et Huisken[7, 8] ont étudié les mouvements par courbure moyenne des graphes dans  $\mathbb{R}^N$  et ils ont obtenu un résultat d'existence très général qui, de manière analytique, peut se formuler de la façon suivante : pour toute donnée initiale  $u_0 \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$ , il existe une solution régulière du problème :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \frac{(D^2 u Du, Du)}{1 + |Du|^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty),$$

---

(\*)Ce travail a été effectué avec le soutien du programme européen TMR "Viscosity Solutions and their Applications"

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}^N .$$

Ce résultat d'existence est assez surprenant car il est obtenu sans aucune hypothèse sur le comportement à l'infini de la donnée initiale et, bien entendu, il fournit des solutions qui peuvent avoir, en particulier, des croissances quelconques à l'infini.

Le but de notre travail en cours est d'étudier non seulement les propriétés d'unicité des solutions de (1)-(2) mais aussi d'équations quasilineaires elliptiques et paraboliques plus générales posées dans  $\mathbb{R}^N$  ou dans des ouverts non bornés ; nous rappelons que le cas des ouverts bornés est couvert de manière très satisfaisante par les résultats du "Users'guide" sur les solutions de viscosité de Crandall, Ishii & Lions[6].

Nous décrivons dans cet article les premiers progrès dans cette direction en nous restreignant au cas de (1)-(2) ; nous ne donnons également que des idées de preuve et nous renvoyons à [2] pour des résultats plus généraux avec des preuves complètes.

Dans l'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires, on est plutôt habitué à ce que la difficulté pour obtenir des résultats d'unicité provienne de la prise en compte de solutions faibles. Ce n'est pas du tout le cas ici où l'obstacle majeur est l'absence de restriction sur le comportement des solutions à l'infini ; supposer que les solutions sont  $C^\infty$  en  $x$  et  $t$  ne simplifie pas vraiment le problème. En fait, cette difficulté fondamentale est aggravée par la dépendance de l'équation en  $Du$  et plus précisément par l'interaction  $Du-D^2u$  qui rend délicate toute procédure de linéarisation.

Du côté des points positifs, mais encore faut-il être capable d'en tirer parti, il y a l'aspect géométrique de l'équation (1). La section 2 a pour but de décrire ces aspects géométriques dont l'intérêt est multiple : d'une part, ils conduisent à une reformulation des questions d'unicité qui a l'air plus simple mais qui conserve malheureusement bon nombre des difficultés de la formulation initiale. D'autre part, elle permet de mieux comprendre comment on peut obtenir des résultats d'existence généraux de solutions de (1)-(2) par des méthodes d'analyse.

Ces aspects géométriques utilisent "l'approche par lignes de niveaux" des mouvements d'hypersurfaces avec des vitesses normales prescrites. Cette approche qui est apparue d'abord dans le cas de mouvements à vitesse normale constante dans [1], a été utilisée de manière systématique pour la première fois par Osher & Sethian[11] pour le calcul numérique des évolutions de surfaces avec des vitesses normales quelconques. La première justification théorique est due à Evans & Spruck[9] pour le mouvement par courbure moyenne, puis Chen, Giga & Goto[5] l'ont généralisée à tous les types de vitesse.

Nous rappelons que cette approche par lignes de niveaux fournit une notion de solutions faibles pour les mouvements d'hypersurfaces de  $\mathbb{R}^{N+1}$  avec des vitesses normales dépendant de la position de l'hypersurface, du temps, des directions des normales et des courbures principales.

Malheureusement, autant l'utilisation de l'interprétation géométrique du problème (1)-(2) apporte des arguments simples et efficaces pour traiter les questions d'existence, autant elle ne nous a pas permis d'obtenir des résultats d'unicité très généraux ; en fait, pas plus généraux que ceux obtenus par l'approche directe.

Nous décrivons dans les sections suivantes les quelques résultats d'unicité obtenus.

Dans la section 3, nous étudions le cas  $N = 1$  qui correspond à des mouvements de graphes par courbure moyenne dans  $\mathbb{R}^2$ . Il est bien connu qu’au moins pour les mouvements d’hypersurfaces compactes, la dimension 2 est un cas particulier où peu de phénomènes singuliers apparaissent. Dans ce cas, nous pouvons effectivement prouver que l’unicité a lieu dans le cadre naturel, c’est-à-dire celui des solutions classiques sans comportement prescrit à l’infini.

Dans le cas  $N \geq 2$ , seuls des résultats partiels sont obtenus. Dans la section 4, nous considérons le cas où  $u_0$  est convexe et coercive i.e.  $u_0(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . On peut alors prouver l’existence d’une solution  $u$  qui est également convexe en  $x$  et coercive pour tout  $t$ . Nous montrons que cette solution est unique dans la classe la plus générale, c’est-à-dire ici celle des solutions de viscosité continues sans comportement prescrit à l’infini.

Enfin, dans la section 5 (peut-être aurions-nous dû commencer par là ?), nous nous attaquons à ce problème d’unicité à l’aide des méthodes classiques pour obtenir des résultats de comparaison pour les solutions de viscosité. En essayant de “pousser à fond” ces méthodes, nous obtenons seulement le résultat suivant : si  $|Du_0(x)| \leq C(1 + |x|^\nu)$  avec  $\nu < 1$  et  $C > 0$  alors l’unicité a lieu dans la classe des solutions à croissance polynomiale. Un résultat qui, bien entendu, est très loin d’être satisfaisant.

## 2 Les aspects géométriques de l’équation

Nous commençons par une remarque très simple : si  $u$  est solution de (1)-(2) alors la fonction  $w : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$w(x, y, t) := u(x, t) - y ,$$

est solution de

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w + \frac{(D^2 w D w, D w)}{|D w|^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N+1} \times (0, +\infty) ,$$

$$(4) \quad w(x, 0) = u_0(x) - y \quad \text{dans } \mathbb{R}^{N+1} .$$

On reconnaît l’équation qui intervient dans l’approche dite “par lignes de niveaux” du mouvement par courbure moyenne des articles de Chen, Giga & Goto[5] et Evans & Spruck[9]. Cette approche est basée sur les résultats suivants dans lesquels, si  $A$  est une partie d’un espace  $\mathbb{R}^m$ , “ $UC(A)$ ” désignera l’espace des fonctions uniformément continues sur  $A$  ; on notera aussi  $X$  l’espace des fonctions continues qui sont dans  $UC(\mathbb{R}^{N+1} \times [0, T])$  pour tout  $T > 0$ .

**Résultat 1 :** *Pour toute donnée initiale  $w_0 \in UC(\mathbb{R}^{N+1})$ , l’équation (3) admet une unique solution  $w$  dans  $X$ . De plus, l’équation (3) satisfait le principe du maximum pour des solutions de viscosité qui sont dans  $X$ .*

**Résultat 2 :** Si  $w_1, w_2 \in X$  sont deux solutions de l'équation qui vérifient :

$$\begin{aligned} \{w_1(\cdot, 0) > 0\} &= \{w_2(\cdot, 0) > 0\} = \Omega_0, \\ \{w_1(\cdot, 0) < 0\} &= \{w_2(\cdot, 0) < 0\}, \\ \{w_1(\cdot, 0) = 0\} &= \{w_2(\cdot, 0) = 0\} = \Gamma_0. \end{aligned}$$

et :

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} |w_1(x, 0)|, \liminf_{x \rightarrow +\infty} |w_2(x, 0)| > 0,$$

alors, pour tout  $t > 0$  :

$$\begin{aligned} \{w_1(\cdot, t) > 0\} &= \{w_2(\cdot, t) > 0\} = \Omega_t, \\ \{w_1(\cdot, t) < 0\} &= \{w_2(\cdot, t) < 0\}, \\ \{w_1(\cdot, t) = 0\} &= \{w_2(\cdot, t) = 0\} = \Gamma_t. \end{aligned}$$

Les conséquences de ces résultats sont multiples. D'abord, si on se donne une hypersurface  $\Gamma_0$  qui est le bord d'un ouvert  $\Omega_0$ , on peut la "représenter" par une fonction uniformément continue  $w_0$  qui sera strictement positive dans  $\Omega_0$ , nulle sur  $\Gamma_0$  et strictement négative ailleurs; on peut prendre par exemple la distance "signée" à  $\Gamma_0$  qui vaut  $+d(x, \Gamma_0)$  dans  $\Omega_0$  et  $-d(x, \Gamma_0)$  sur le complémentaire. Ce choix de signes revient à orienter  $\Gamma_0$ , c'est-à-dire à définir "l'intérieur" et "l'extérieur" de  $\Gamma_0$ .

Le résultat 2 montre que l'évolution  $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_t$  ne dépend pas du choix de cette représentation, pourvu que celle-ci soit faite à l'aide d'une fonction *uniformément continue* ; elle est donc géométrique puisqu'elle ne dépend donc que de  $\Gamma_0$  et de son orientation. En fait, on se rend compte dans les applications que c'est vraiment  $\Omega_0$  l'élément important (une phase dans un problème de transition de phase, par exemple).

Pour des temps petits et pour des hypersurfaces régulières, l'évolution  $\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_t$  coïncide avec la propagation de  $\Gamma_0$  avec une vitesse égale à la courbure moyenne suivant la définition géométrique. Et comme la solution  $w$  existe pour tous temps, cette approche par "lignes de niveaux" fournit une notion de solution faible pour le mouvement par courbure moyenne après le développement des singularités (qui est un phénomène connu pour  $N \geq 2$ ).

Il est à noter que, même si ce mouvement peut-être considéré comme "stable" et "unique" puisqu'il hérite des propriétés de stabilité et d'unicité des solutions de viscosité de (3), "l'hypersurface"  $\Gamma_t$  peut être très irrégulière et même d'intérieur non vide.

La partie géométrique de ces résultats provient essentiellement du fait que l'équation est invariante par changement de variable  $w \mapsto \psi(w)$ ,  $\psi' > 0$ . Par exemple, dans notre cas, la fonction  $\tanh(u(x, t) - y)$  est une solution de (3). Cette solution n'est pas forcément uniformément continue mais elle est au moins continue bornée.

On peut avoir l'impression (fausse) d'avoir résolu complètement le problème via la :

**Proposition 2.1 :** Si le problème (3)-(4) admet une unique solution de viscosité dans  $C_b(\mathbb{R}^{N+1} \times (0, +\infty))$  pour toute donnée initiale de la forme  $\tanh(u_0(x) - y)$ , alors le

problème (1)-(2) admet une unique solution de viscosité dans  $C(\mathbb{R}^N \times (0, +\infty))$  pour toute donnée initiale  $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ .

Mais, dans le résultat 1 ci-dessus, “l’équation (3) satisfait le principe du maximum pour des solutions de viscosité uniformément continues” signifie que l’on sait comparer des sous et sursolutions uniformément continues, ou même des sous et sursolutions dont l’une est bornée uniformément continue ( $BUC$ ) et l’autre seulement continue bornée ( $C_b$ ). Par contre, on n’a pas de résultat de comparaison pour des sous et sursolutions qui sont toutes les deux continues bornées et contrairement à ce que l’on peut penser, les résultats précédents, en particulier la comparaison “ $BUC-C_b$ ”, sont insuffisants.

Par contre, ces résultats nous permettent d’obtenir aisément une borne  $L^\infty$  sur la solution  $u$ . Notons :

$$M(x, R) = \max\{u_0(y); y \in B(x, R)\} \quad , \quad m(x, R) = \min\{u_0(y); y \in B(x, R)\}.$$

On a la :

**Proposition 2.2 :** *Soit  $u$  une solution de (1)-(2). Pour tout  $x \in \mathbb{R}^N$  et  $t > 0$ , on a :*

$$(5) \quad m(x, \sqrt{2Nt}) - \sqrt{2Nt} \leq u(x, t) \leq M(x, \sqrt{2Nt}) + \sqrt{2Nt}.$$

**Idée de la preuve :** Elle repose sur un argument de comparaison que nous allons présenter de manière géométrique car il apparaîtra ainsi plus simple.

En fait, le principe du maximum pour (3) peut se reformuler de la manière suivante : si les familles d’ouverts  $(\Omega_t)_t$  et  $(\tilde{\Omega}_t)_t$  se déplacent par courbure moyenne au sens du résultat 2 ci-dessus alors :

$$\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}_0 \Rightarrow \Omega_s \subset \tilde{\Omega}_s, \quad \text{pour tout } s > 0.$$

Cette propriété de “monotonie” (préservation de l’inclusion) est fondamentale et elle peut même être utilisée comme définition non seulement dans le mouvement par courbure moyenne, mais aussi pour des mouvements plus généraux (cf. Barles & Souganidis[4]).

On se place dans  $\mathbb{R}^{N+1}$  et on pose :

$$\Omega_0 := B((x, z(x, t)), \sqrt{2Nt}) \quad , \quad \tilde{\Omega}_0 = \{y > u_0(x)\},$$

où  $z(x, t) = M(x, \sqrt{2Nt}) + \sqrt{2Nt}$ . Dans ce cas les mouvements sont donnés par :

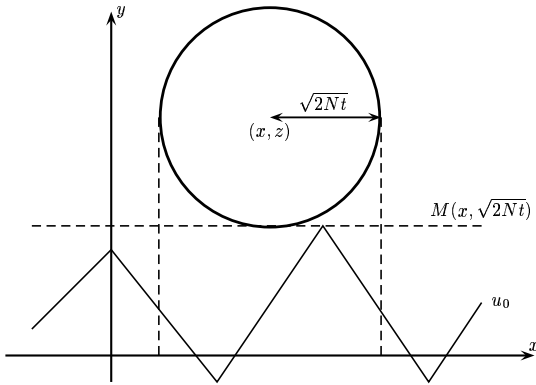
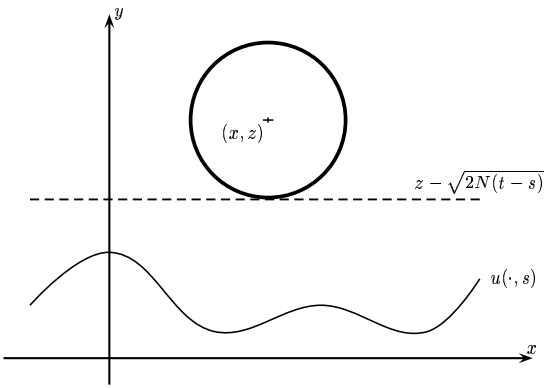
$$\Omega_s := B((x, z(x, t)), \sqrt{2N(t-s)}) \quad , \quad \tilde{\Omega}_s = \{y > u(x, s)\},$$

et comme  $\Omega_0 \subset \tilde{\Omega}_0$ , l’inclusion :

$$B((x, z(x, t)), \sqrt{2N(t-s)}) \subset \{y > u(x, s)\},$$

pour tout  $s < t$  donne l’estimation (2.2) en faisant tendre  $s$  vers  $t$ .

L’étape suivante dans le processus de démonstration de l’existence serait l’estimation de gradient que nous ne détaillons pas ici. Signalons simplement que la forme de l’équation et, en particulier, la dépendance en  $Du$  permet de faire fonctionner la méthode de Bernstein d’une manière un peu spéciale. On montre que, pour une certaine fonction bornée  $\chi$ ,  $\chi(|Du|^2)$  est sous-solution d’une équation linéaire ce qui permet d’obtenir l’estimation de gradient sans se préoccuper du comportement de  $Du$  à l’infini.

Figure 1: Au temps  $t = 0$ .Figure 2: Au temps  $0 < s < t$ .

### 3 Le cas de la dimension 1

En dimension 1, l'équation devient :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u_{xx}}{1 + |u_x|^2} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$(7) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

On a le :

**Théorème 3.1 :** *Le problème (6)-(7) admet une unique solution classique pour tout  $u_0 \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ .*

**Preuve :** L'existence provient des résultats de Ecker & Huisken[7, 8].

Pour l'unicité, on pose :

$$v(x, t) := \int_0^x u(y, t) dy.$$

En intégrant l'équation, il vient :

$$v_t - \text{Arctg}(v_{xx}) + g(t) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

où  $g(t) = \text{Arctg}(v_{xx}(0, t))$ . On introduit alors :

$$w(x, t) = v(x, t) + \int_0^t g(s) ds,$$

qui résout le problème :

$$(8) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \text{Arctg}(w_{xx}) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$(9) \quad w(x, 0) = \int_0^x u_0(y) dy \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

On utilise alors le :

**Lemme 3.2 :** *Le problème (8)-(9) admet une unique solution de viscosité pour tout  $u_0 \in C(\mathbb{R})$ .*

Encore une fois c'est l'unicité qui est la partie intéressante du lemme et non l'existence qui résulte ici d'arguments très simples dès que l'on a un résultat de comparaison, ce qui sera le cas (on le verra dans la preuve du lemme).

Admettons d'abord le lemme et déduisons-en le théorème. Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions classiques de (6)-(7), on construit  $v_1, g_1, w_1$  et  $v_2, g_2, w_2$  en procédant comme ci-dessus. Les fonctions  $w_1$  et  $w_2$  étant toutes les deux solutions de (8)-(9), on déduit du lemme que, pour tous  $x$  et  $t$  :

$$\int_0^x u_1(y, t) dy + \int_0^t g_1(s) ds = \int_0^x u_2(y, t) dy + \int_0^t g_2(s) ds,$$

et le résultat du théorème s'obtient en dérivant cette égalité par rapport à  $x$ .

Passons maintenant à la **preuve du lemme**. Elle utilise une technique de solutions explosives ("friendly giants"). Si les fonctions  $w_1$  et  $w_2$  sont deux solutions de (8)-(9), on pose  $\chi = w_1 - w_2$ . La fonction arc-tangente étant, en particulier, höldérienne d'exposant  $\alpha$  pour tout  $\alpha \in (1/2, 1)$ ,  $\chi$  satisfait :

$$(10) \quad \frac{\partial \chi}{\partial t} - K_\alpha (\chi_{xx}^+)^{\alpha} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

$$(11) \quad \chi(x, 0) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R},$$

pour une certaine constante positive  $K_\alpha$ .

On introduit alors les fonctions :

$$\varphi_R(x, t) = \tilde{K} \left[ (1 + R^2)^{1/2} (1 - ct) - (1 + x^2)^{1/2} \right]^{-k},$$

où  $R > 0$  et  $k = (2\alpha - 1)(1 - \alpha)^{-1}$ . Pour un choix convenable des constantes  $\tilde{K}$  et  $c$ , les  $\varphi_R$  sont des sursolutions de l'équation qui explosent sur le bord du domaine borné :

$$Q_R := \{(x, t) : (1 + x^2)^{1/2} < (1 + R^2)^{1/2}(1 - ct)\} .$$

La comparaison de  $\chi$  et des  $\varphi_R$  ne pose donc aucun problème et on a :

$$\chi(x, t) \leq \varphi_R(x, t) \quad \text{dans } Q_R .$$

On fixe alors  $x$  et  $t < c^{-1}$ . Pour  $R$  assez grand,  $(x, t) \in Q_R$  et on fait tendre  $R$  vers l'infini dans l'inégalité précédente : comme  $\varphi_R(x, t) \rightarrow 0$  quand  $R \rightarrow \infty$ , on obtient  $\chi(x, t) \leq 0$ .

D'où  $w_1(x, t) \leq w_2(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t < c^{-1}$ , puis l'égalité puisque  $w_1$  et  $w_2$  jouent des rôles symétriques. On répète alors l'argument en partant cette fois de  $t = c^{-1}$  au lieu de  $t = 0$ , ce qui conduit à  $w_1(x, t) = w_2(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t < 2c^{-1}$ ...etc

Il est à noter enfin que ce même argument avec des modifications minimales montre que le principe du maximum a lieu pour l'équation (8) pour des sous et sursolutions de viscosité continues.

## 4 Sur les solutions convexes

On revient au cas de la dimension quelconque mais on suppose ici que la donnée initiale  $u_0$  est convexe et coercive i.e.  $u_0(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ .

On a alors le :

**Théorème 4.1 :** *Le problème (1)-(2) admet une unique solution qui est convexe en  $x$  pour tout  $t > 0$  et coercive uniformément par rapport à  $t$ . De plus, on a un résultat de comparaison pour (1)-(2) entre sur et sous-solutions de viscosité continues, sans aucune restriction sur leurs comportements à l'infini.*

Preuve : Nous commençons par démontrer **l'existence**. L'existence d'une solution classique provient des résultats de Ecker & Huisken[7, 8]. Nous allons donner une démonstration simple mais qui ne fournit qu'une solution de viscosité (et non une solution classique *a priori*).

Comme  $u_0$  est convexe coercive, il existe une suite croissante  $(u_0^k)_k$  de fonctions convexes coercives lipschitziennes telles que :

$$\sup_k u_0^k = u_0 .$$

On peut de plus supposer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^N$ , on a :

$$u_0^k \geq \delta|x| - C ,$$

pour certaines constantes  $\delta, C > 0$ .



Pour tout  $k$ , comme la donnée initiale est lipschitzienne, par les résultats du “Users’guide” [6], il existe une unique solution  $u^k$  de (1)-(2) dans  $X$  avec la donnée initiale  $u_0^k$ . De plus, par un résultat de comparaison pour les solutions qui appartiennent à  $X$ , la suite  $(u^k)_k$  est croissante. On applique enfin les résultats de Giga, Goto, Ishii & Sato[10] pour montrer que les  $u^k$  sont convexes en  $x$  pour tout  $t$ .

Pour obtenir des estimations sur les  $u^k$ , on utilise la Proposition 2.2 qui fournit une estimation  $L^\infty$  uniforme sur les  $u^k$  car on peut supposer que, pour tout  $k$  :

$$\min_{\mathbb{R}^N} u_0 \leq u_0^k \leq u_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N ,$$

puis la convexité donne l’estimation uniforme de gradient :

$$\|Du^k(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} \leq R^{-1} \left( \max_{B_{2R}} u^k(\cdot, t) - \min_{B_{2R}} u^k(\cdot, t) \right)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

Enfin, et c’est la seule estimation que nous allons utiliser pour la variable  $t$ , la convexité des  $u^k$ , conjuguée au fait qu’elles sont solutions de (1), implique qu’elles sont croissantes en temps.

Le passage à la limite utilise la méthode des semi-limites relaxées (cf. [6]) : les fonctions  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  définies par :

$$\bar{u}(x, t) = \limsup_{\substack{(y, s) \rightarrow (x, t) \\ k \rightarrow +\infty}} u^k(y, s) \quad \text{et} \quad \underline{u}(x, t) = \liminf_{\substack{(y, s) \rightarrow (x, t) \\ k \rightarrow +\infty}} u^k(y, s) ,$$

sont respectivement sous et sursolution de viscosité de (1)-(2). De plus, elles sont localement lipschitziennes en  $x$  pour tout  $t$  et on montre facilement que :

$$\underline{u} = \sup_k u^k \quad \text{et} \quad \bar{u} = (\underline{u})^* .$$

Pour conclure, il suffit de remarquer qu’étant continue en  $x$ , croissante en temps et sursolution d’une équation parabolique,  $\underline{u}$  ne peut admettre de discontinuité en temps et que  $u := \bar{u} = \underline{u}$  est donc une solution convexe continue. La coercivité de cette solution apparaîtra dans le cours de la preuve d’unicité et résulte de l’approche géométrique.

Pour l’unicité, on va prouver que l’on peut comparer cette solution  $u$  avec toute sursolution continue  $w$  et toute sous-solution continue  $v$ . Curieusement les deux inégalités cherchées vont s’obtenir de manières assez différentes.

Pour la comparaison avec  $v$ , on fait le changement de variable de Kruzkov :

$$\tilde{u} = -\exp(-u) \quad , \quad \tilde{v} = -\exp(-v) .$$

Ces nouvelles fonctions  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  satisfont deux propriétés-clé : d’abord la coercivité de  $u$  implique que  $\tilde{u}(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$  uniformément par rapport à  $t$  ; quant à  $\tilde{v}$ , par sa définition même, on a  $\limsup_{|x| \rightarrow +\infty} \tilde{v}(x) \leq 0$ .

Ensuite  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  sont solutions d'une équation quasilineaire parabolique de la forme :

$$(12) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + F(w, Dw, D^2w) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

De plus, la convexité de  $u$  en  $x$  va impliquer que la fonction  $F$  satisfait une propriété qui s'écrit formellement :

$$\frac{\partial F}{\partial w}(\tilde{u}, D\tilde{u}, D^2\tilde{u}) \geq -2,$$

et cette propriété permet d'adapter l'argument classique de comparaison pour les solutions de viscosité, compte-tenu du fait que l'infini ne joue plus aucun rôle. Il est néanmoins à noter que le fait que cette inégalité cruciale soit satisfaite par la fonction qui joue le rôle de la sursolution est tout à fait nécessaire dans cet argument, et ceci rend dissymétriques les rôles de  $u$  et  $v$ .

La comparaison avec  $w$ , une sursolution continue de (1)-(2), ne peut donc s'effectuer avec la même approche. On va d'abord montrer que  $w$  est coercive uniformément par rapport à  $t$ . Ceci se fait à l'aide de l'approche par ligne de niveaux : comme la donnée initiale  $u_0$  est convexe et coercive, pour tout  $p \in \mathbb{R}^N$ , il existe une constante  $C(p)$  telle que :

$$u_0(x) \geq p \cdot x - C(p) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Grâce à un argument de comparaison pour l'approche par ligne de niveaux, les hyperplans restant fixes par le mouvement par courbure moyenne, on en déduit que pour tout  $p \in \mathbb{R}^N$  :

$$w(x, t) \geq p \cdot x - C(p) \quad \text{pour tous } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

En fait, cet argument prouve, en le raffinant un peu que, outre la coercivité de  $w$ , on a :

$$w(x, t) \geq u_0(x) \quad \text{pour tous } (x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, +\infty).$$

L'idée alors consiste à comparer  $w$  et  $u^k$  pour tout  $k$ . Une très légère adaptation des arguments de comparaison du "Users'guide" conduit à l'inégalité :

$$u^k \leq w \quad \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty),$$

et la conclusion s'en suit en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ .

## 5 Et les méthodes classiques de solutions de viscosité?

Peut-être aurait-il été naturel de commencer par se demander : que se passe-t-il si on attaque le problème d'unicité avec des méthodes classiques de solutions de viscosité ? Typiquement cela consiste à s'intéresser à des quantités du type :

$$M^{\varepsilon, \alpha} = \max_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times [0, T]} \left\{ u(x, t) - v(y, t) - \frac{|x - y|^2}{\varepsilon^2} - \alpha(|x|^2 + |y|^2) \right\},$$

où  $u$  et  $v$  sont respectivement des sous et sursolution de viscosité de l'équation considérée et  $\varepsilon, \alpha$  sont des paramètres petits destinés à tendre vers 0. Quand tout se passe bien, on arrive à montrer d'une part que  $M^{\varepsilon, \alpha}$  tend vers 0 quand  $\varepsilon, \alpha$  tendent vers 0, ce qui donne  $u \leq v$  dans  $\mathbb{R}^N \times [0, T]$ .

Ici on peut tenter une preuve de ce type, les termes de "pénalisation" en  $\varepsilon$  et  $\alpha$  devant être remplacés par des substituts convenables pour tenir compte des croissances de  $u$  et  $v$ .

Le meilleur (!) résultat que nous avons obtenu avec cette stratégie est le :

**Théorème 5.1 :** *On suppose que  $u_0$  est une fonction localement lipschitzienne qui satisfait :*

$$|Du_0(x)| \leq C(1 + |x|^\nu) \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N,$$

*pour certaines constantes  $C > 0$  et  $0 \leq \nu < 1$ . On a alors un résultat de comparaison pour les sous et sursolutions de viscosité de (1)-(2) qui sont à croissances polynomiales.*

Ce résultat est très loin d'être satisfaisant car il ne concerne que des solutions à croissance strictement sous-quadratique. Il est obtenu en utilisant une "fonction-test" du type :

$$\mathcal{T}(x, y, t) = u(x, t) - v(y, t) - e^{Lt} K(x + y) \left( \frac{|x - y|^p}{\varepsilon^p} + \alpha \right),$$

où  $L > 0$  est une constante assez grande, de même que  $p$  et  $K(x + y) = 1 + |x + y|^k$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$ .

Par cette méthode, nous n'avons pas pu faire mieux ; le problème reste ouvert de savoir si la faiblesse de ce résultat est due simplement à une limitation de la méthode ou si, au contraire, on aurait des contre-exemples à l'unicité en croissance quadratique.

En fait, cette méthode de démonstration permet de traiter le cas d'équations beaucoup plus générales et elle n'utilise en aucune manière le caractère géométrique de l'équation, deux faiblesses sans doute rédhibitoires au regard de notre problème d'unicité.

## Références

- [1] G. BARLES. Remark on a flame propagation model. *Rapport INRIA*, **464** (1985).
- [2] G. BARLES, S. BITON ET O. LEY. En préparation.
- [3] G. BARLES, H. M. SONER ET P. E. SOUGANIDIS. Front propagation and phase field theory, *SIAM J. Cont. Opt.* **31** (1993), 439–469.
- [4] G. BARLES ET P. E. SOUGANIDIS. A new approach to front propagation problems : theory and applications. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 141 (1998) 237-296.
- [5] Y.-G. CHEN, Y. GIGA ET S. GOTO. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J. Diff. Geom.* **33** (1991), 749–786.
- [6] M. G. CRANDALL, H. ISHII ET P.-L. LIONS. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. AMS* **27** (1992), 1–67.

- [7] K. ECKER ET G. HUISKEN. Mean curvature evolution of entire graphs. *Annals of Math.* **130** (1989), 453-471.
- [8] K. ECKER ET G. HUISKEN. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. *Invent. Math.* **105** (1991), 547-569.
- [9] L. C. EVANS ET J. SPRUCK. Motion of level sets by mean curvature I. *J. Diff. Geom.* **33** (1991), 635-681.
- [10] Y. GIGA, S. GOTO, H. ISHII ET M.-H. SATO. Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains, *Indiana Univ. Math. J.* **40** (1991), no 2, 443-470.
- [11] S. OSHER ET SETHIAN. Fronts moving with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi equations, *J. Comp. Phys.* **79** (1988), 12-49.
- [12] P. E. SOUGANIDIS. Front propagation: Theory and Applications, CIME Course on Viscosity Solutions, *Lect. Notes in Math.* **1660**, Springer-Verlag, (1997).

(<sup>1</sup>) Laboratoire de Mathématiques et Physique Théorique. Faculté des Sciences et Techniques. Université de Tours. Parc de Grandmont. 37200 Tours, FRANCE.

(<sup>2</sup>) Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata. Università Degli Studi Di Padova. Via Belzoni, 7. I-35131 Padova, ITALIE.