

1. Il y a trois bonnes réponses qui sont :

$$\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \in L^1([0, 1]), \quad \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \in L^2(\mathbb{R}), \quad \left(x \mapsto \frac{\sin x}{x}\right) \in L^2(\mathbb{R}).$$

2. La valeur de l'intégrale est $\frac{\pi}{a}$.

3. Il y a deux bonnes réponses qui sont :

$$\widehat{1_{[-1,1]}}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi}, \quad \widehat{e^{-|x|}}(\xi) = \frac{2}{1 + 4\pi^2 \xi^2}$$

4. La valeur de l'intégrale est 2.

5. La fonction $z \mapsto -1/z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ et est à valeurs dans \mathbb{C} . Comme \exp est holomorphe sur \mathbb{C} , par composition de fonctions holomorphes, f est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$. On a une singularité en 0. f n'est pas prolongeable par continuité en 0 (par exemple, $f(i/n) = \exp(n^2) \rightarrow +\infty$) et 0 est une singularité essentielle car il n'existe pas de $k \in \mathbb{N}$ tel que $z^k f(z)$ ait une limite quand $z \rightarrow 0$.

6. Pour tout $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^+$, $\text{Log } z = \ln|z| + i\theta$ où $0 < \theta < 2\pi$ est un argument de z . On a : $-\sqrt{3} - i = 2e^{i11\pi/6}$ (Attention : on peut aussi écrire $2e^{-i\pi/6}$ mais $-\pi/6 \notin]0, 2\pi[$). D'où $\text{Log}(-\sqrt{3} - i) = \ln 2 + i11\pi/6$.

7. La fonction $f(z) = \sin z/(36 + z^2)$ est holomorphe sur \mathbb{C} privé de ses 2 pôles $6i$ et $-6i$. Quel que soit le chiffre $c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $0 < R < 6$ et donc f est holomorphe sur le disque $D(0, R)$ de centre 0 et de rayon $R < 6$. Par le théorème de Cauchy, l'intégrale est nulle.

8. Soit I l'intégrale et $f(z) = 1/(z^2 - 2z + 2)^2 = 1/[(z - (1 + i))^2(z - (1 - i))^2]$. C'est une fraction rationnelle de degré $-4 \leq -2$ ayant 2 pôles non réels. D'après le cours, I est une intégrale de type 2 (en particulier, elle est convergente et, de façon évidente, c'est un réel strictement positif). Par la formule des résidus, $I = 2\pi i \text{ Rés}(f, 1 + i)$. Comme $a := 1 + i$ est un pôle d'ordre 2, le résidu recherché sera le coefficient d'ordre 1 du développement en série entière au voisinage de a de

$$(z - a)^2 f(z) = \frac{1}{(z - 1 - i)^2} = \frac{1}{(2i)^2} \frac{1}{(1 + (z - a)/(2i))^2} = \frac{i}{2} \left(\frac{1}{1 + (z - a)/(2i)} \right)'$$

Comme $(1 + (z - a)/(2i))^{-1} = 1 - (z - a)/(2i) + (z - a)^2/(2i)^2 + \dots$, en dérivant cette série entière, on obtient :

$$(z - a)^2 f(z) = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}(z - a) + \dots$$

D'où $\text{Rés}(f, 1 + i) = -i/4$ et donc $I = \pi/2$.

9. Question 3 de l'Exercice 3 de la liste dans lequel on a ajouté une 10^{ème} valeur pour faciliter les calculs. La fonction de répartition empirique est donnée dans la Figure 1

Les quantiles $Q(1/4)$, $Q(1/2)$, $Q(3/4)$ sont donc 0.3, 0.5, 1.1.

10. (Version simplifiée de la question 2 de l'Exercice 9 de la liste) On choisit $\hat{p}_n := \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i$ comme estimateur de p pour une loi binomiale $\text{Bin}(3, p)$.

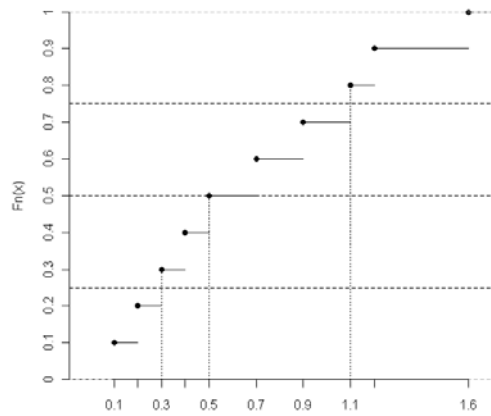


FIGURE 1 – Fonction de répartition empirique

10.1 Le biais $B(\hat{p}_n, p) = \mathbb{E}[\hat{p}_n] - p = \mathbb{E}[\frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n X_i] - p = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] - p = \frac{1}{3n} \sum_{i=1}^n 3p - p = 0$. Comme l'estimateur est sans biais, l'erreur quadratique moyenne $EQM(\hat{p}_n, p)$ est égale à la variance de \hat{p}_n :

$$EQM(\hat{p}_n) = \mathbb{V}(\hat{p}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{\sum_i X_i}{3n}\right) = \frac{\mathbb{V}(X_1)}{9n} = \frac{p(1-p)}{3n}.$$

10.2 Le biais $B(\hat{\sigma}_n^2, \sigma^2)$ s'obtient à partir de :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\sigma}_n^3] &= \mathbb{E}[3\hat{p}_n(1-\hat{p}_n)] = 3(\mathbb{E}[\hat{p}_n] - \mathbb{E}[\hat{p}_n^2]) = 3(p - [\mathbb{V}(\hat{p}_n) + \mathbb{E}[\hat{p}_n]^2]) \\ &= 3(p - [p(1-p)/3n + p^2]) = 3p(1-p)(1 - 1/3n) = \sigma^2(1 - 1/3n). \end{aligned}$$

d'où $B(\hat{\sigma}_n^2, p) = \sigma^2(1 - 1/3n) - \sigma^2 = -\sigma^2/3n$

11. (Questions 1 et 5 de l'Exercice 15 de la liste).

11.1 L'écart-type est supposé connu : $\sqrt{\sigma^2} = 0.05$. L'intervalle de confiance pour la concentration réelle de la solution, est un intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale d'écart-type connu. Au niveau de confiance $1-\alpha = 0.99$: $\left[4.38 \pm z_{1-0.01/2} \frac{\sqrt{\sigma^2}}{\sqrt{n}}\right] = \left[4.38 \pm 2.5758 \frac{0.05}{\sqrt{9}}\right]$

11.2 Maintenant l'écart-type est supposé inconnu et est estimé par $\sqrt{\hat{s}_c^2} = 0.08$ mg/l. L'intervalle de confiance pour la concentration réelle de la solution, est un intervalle de confiance de la moyenne d'une loi normale d'écart-type inconnu. Au niveau de confiance $1 - \alpha = 0.99$:

$$\left[4.38 \pm t_{n-1, 1-\alpha/2} \frac{\sqrt{\hat{s}_c^2}}{\sqrt{n}}\right] = \left[4.38 \pm 3.3554 \frac{0.08}{\sqrt{9}}\right].$$