ne rien écrire

Exo1 :

Exo2 :

Exo3 :

Exo4 :

Exo5 :

NOM Prénom + code barre

2ème année STPI 2019-2020

DEVOIR SURVEILLÉ D'ANALYSE 3 ;

Mardi 14 janvier 2020 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits

Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

Exercice 1. Soit f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1.1. ☐ f continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ☐ f continue en $(0,0)$ ☐ f continue nulle part.

1.2. Si elles existent, calculez

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1.3. ☐ f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ☐ f n'est C^1 que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ☐ f n'est C^1 nulle part

Exercice 2. Soit f la fonction 4-périodique telle que $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{2} & \text{si} \quad -2 \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{t}{2} & \text{si} \quad 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

2.1. Tracer la fonction f.

2.2. La fonction f est-elle égale à sa série de Fourier ? Justifiez.

2.3. Déterminer la série de Fourier de f qu'on notera $S(f)(t)$.

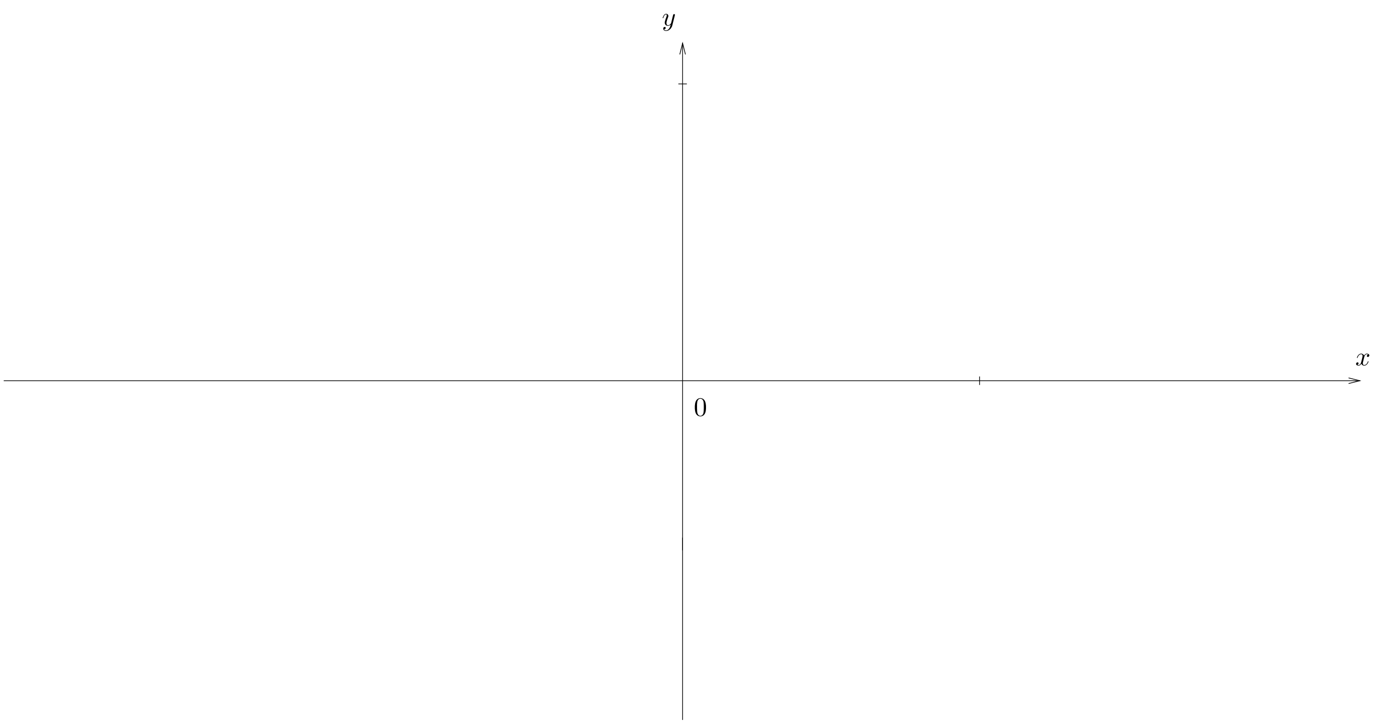
2.4. Calculer les valeurs (*pas de calculs mais indiquer la méthode utilisée*)

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \qquad \text{Méthode :}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \qquad \text{Méthode :}$$

Exercice 3. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $h(x, y) = x^2 + y^2 + 2 - 2xy$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = xy - 1$.

3.1. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f et g sur le même dessin.



3.2. a) Etudier les extrema de h sur $\mathbb{R}^2$.

b) (Question complémentaire) Montrer directement que les points critiques de h sont des minimums globaux.

3.3. On considère le problème : **(I)** Minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

a) Représenter graphiquement les solutions de **(I)** sur le dessin de la question 3.1.

b) Calculer les solutions de **(I)** à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

Exercice 4. En utilisant le changement de variable : $u = x + y$ et $v = 3x + y$, trouver les solutions f de classe C^2 de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 5. Soit $h(x,y) = y^3 - x^2 - y^2 + x - y$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Démontrer qu'il existe une fonction ψ définie au voisinage de 0 telle que, au voisinage de $(0,0)$: $(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \psi(x)$ et calculer $\psi'(0)$ et $\psi''(0)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*