ne rien écrire

Exo1: Exo2:

Exo3: NoteF:

NOM Prénom + code barre

2ème année STPI 2023-2024

DEVOIR SURVEILLÉ D'ANALYSE 3;

Vendredi 19 janvier 2024 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits

Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

Exercice 1.

1.1. Soit f une fonction 2π-périodique, définie par : $\forall t \in [-\pi, \pi[$, $f(t) = 1 - \frac{t}{\pi}$.

a) Justifer l'existence du développement en série de Fourier associé à f et déterminer la relation qui existe entre la fonction f et sa série de Fourier qu'on notera $S(f)(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer les coefficients de Fourier a_n pour $n \geq 0$ et b_n pour $n > 0$.

$a_n =$ Formule:

$b_n =$ Formule:

1.2. Soit g une fonction 1-périodique, définie par : $\forall t \in [0, 1[$, $g(t) = t - 1/2$.

a) Faire un dessin sur $[-3, 3]$ et justifer l'existence du développement en série de Fourier associé à f et déterminer la relation qui existe entre la fonction f et sa série de Fourier qu'on notera $S(f)(t)$.

b) Déterminer les coefficients de Fourier a_n pour $n \geq 0$ et b_n pour $n > 0$ et calculer $I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$a_n =$ $b_n =$

Les calculs de I:

Exercice 2.

2.1. Déterminer, puis représenter dans le le premier repère de Figure 1 , le domaine de définition $\mathcal{D}_h$ et les lignes de niveau $L_c(h)$, pour $c = 0$, et $c = 1$, de la fonction h définie par : $h(x,y) = \sqrt{x - ln(y)}$.

2.2. Déterminer, puis représenter dans le deuxième repère de Figure 1, le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f définie par : $f(x,y) = \dfrac{\ln(x^2 - y)}{\sqrt{x - ln(y)}}$.

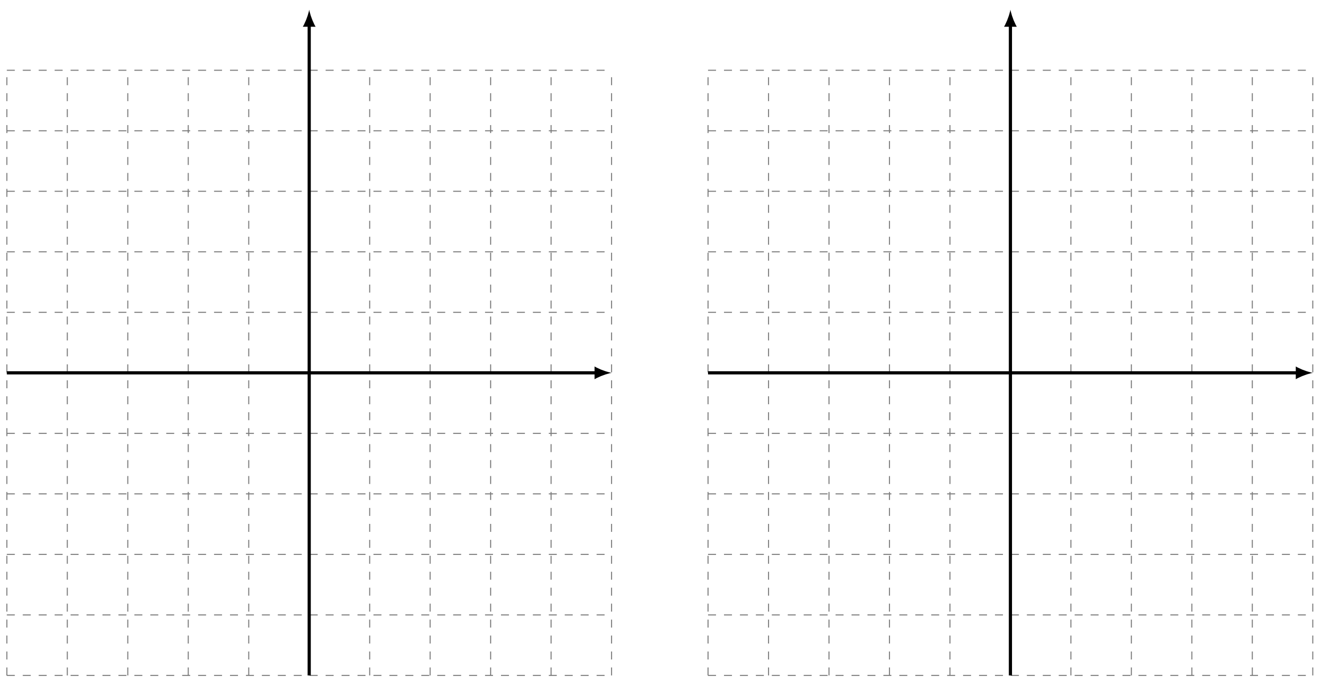

Figure 1

2.3. Calculer le gradient de la fonction f en tout point (x_0, y_0) de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$ et donner l'équation du plan tangent au point $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) =$

L'équation du plan tangent est :

2.4. Résoudre pour $(x,y) \in D =]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, l'équation $x^2 \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + yx\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1$ à l'aide du changement de variable $(u,v) = (x, y/x)$, la fonction inconnue g étant de classe C^2 sur D.

Exercice 3. 3.1. On considère la fonction d définie sur $\mathbb{R}^2$ par $d(x, y) = x^2 - \cos(y)$.
Déterminer sur $\mathbb{R}^2$ les points critiques de d et discuter leur nature (extremum local, point selle, etc).

3.2. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x,y) = x^3 + y^3$ et $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Déterminer, à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, les solutions du problème: **(I)** Minimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.