ne rien écrire
Exo1 :
Exo2 :
Exo3 :
Exo4 :

NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2020-2021
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3

Mercredi 13 janvier 2021 — durée : 2h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

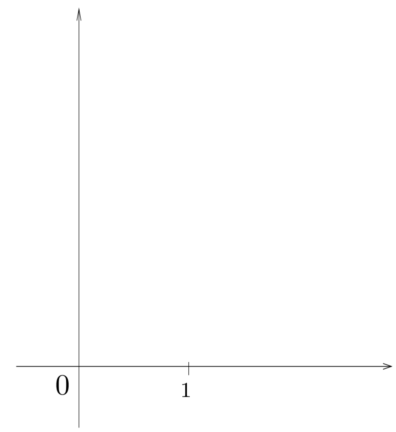
Exercice 1. Cocher une case **CV** (converge) ou **DV** (diverge) à tort sera pénalisé. On ne demande ni calculs ni justifications dans cet exercice.

	Cocher		En cas de convergence :
	CV	**DV**	valeur ou somme
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n}$			
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}}$			
$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$			
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}dx$			
$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}dx$			

Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^\alpha}$ converge :	
$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} x^n$ a pour rayon de convergence	$R =$
Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\lvert a_n\rvert \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 5^n$ alors le rayon de convergence	$R =$

Exercice 2. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$. Ensemble de définition de f :

Allure de la représentation graphique de f



Ensemble où f est dérivable :

$f'(x) =$

Démontrer que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur.

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$. *[On vérifiera soigneusement les hypothèses des résultats utilisés.]*

Exercice 3.

3.1. Faire le développement en série entière de $h(x) = \dfrac{2x-1}{3+x}$ en $x = 0$.

Rayon de convergence du développement obtenu : $R =$

3.2. Soit $g(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n$. Rayon de convergence : $R =$

Exprimer $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles (dit autrement, calculer la somme).

Exercice 4.

4.1. Démontrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. *[Énoncer et vérifier les hypothèses des résultats utilisés.]*

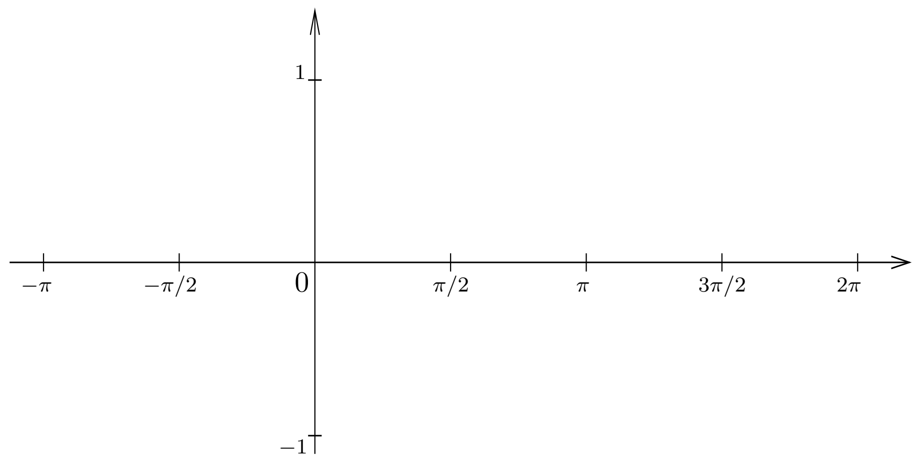
4.2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o(\dfrac{1}{n\sqrt{n}})$.

4.3. Déduire des deux questions précédentes la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

4.4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice ?

Exercice 5. Soit la fonction f définie par $f(t) = |\sin(2t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5.1. Préciser la parité de f, montrer que f est périodique de période $T = \pi/2$ et représenter f sur $[-\pi, 2\pi]$.



5.2. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f et étudier la convergence de la série de Fourier.

[On rappelle la formule trigonométrique : $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$*.]*

5.3. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (col, maximum local ou minimum local).

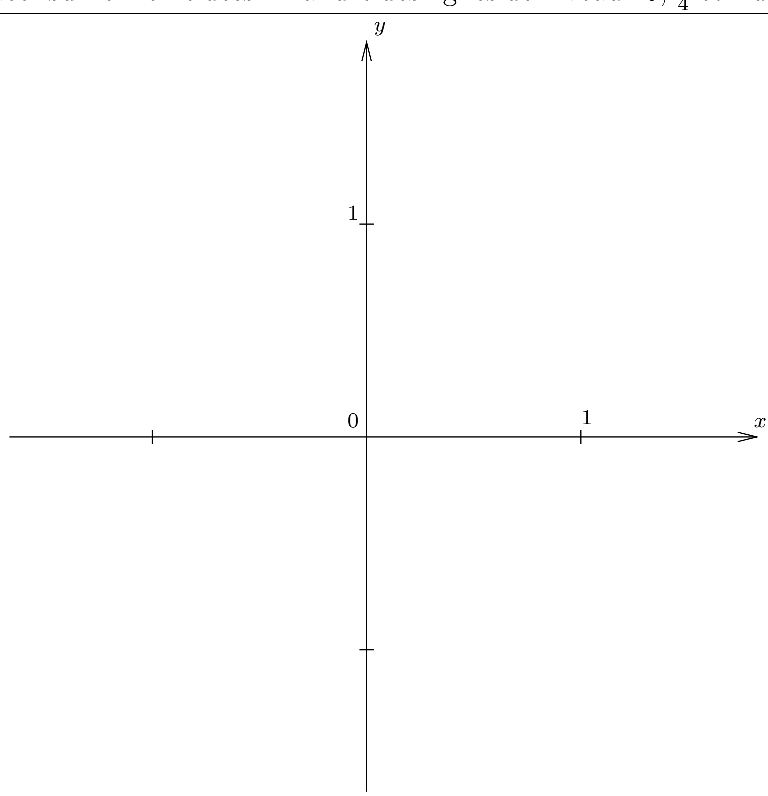
Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On effectue le changement de variable $x = \frac{u+v}{2}$ et $y = \frac{u-v}{2}$ de sorte que $f(x,y) = F(u,v)$.

7.1. Déterminer les dérivés partielles premières de F en fonction de celles de f.

7.2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivés partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$.

Exercice 8. On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions : $f(x,y) = x^2y^2$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

8.1. Tracer sur le même dessin l'allure des lignes de niveaux 0, $\frac{1}{4}$ et 1 de f ainsi que la ligne de niveau 0 de h.



8.2. On considère le problème : **(I)** Maximiser $f(x, y)$ sous la contrainte $h(x, y) = 0$.

a) Représenter graphiquement les solutions de **(I)** sur le dessin de la question 8.1.

b) Calculer les solutions de **(I)** à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y)$.