Exo1 :
Exo2 :
Exo3 :
Exo4 :
Exo5 :

NOM Prénom + code barre

2ème année STPI – 2025-2026

DS2 Analyse 3

Mardi 13 janvier 2026 – 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits

Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

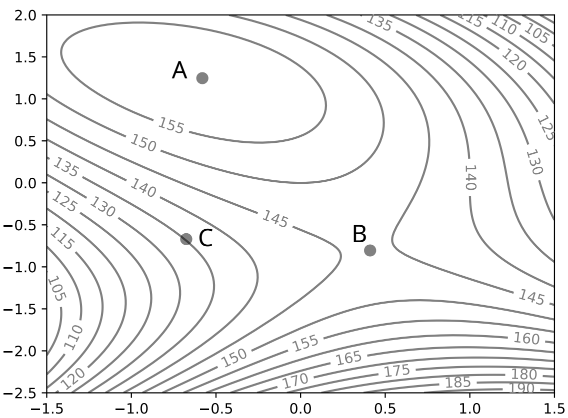
Exercice 1. Soit $\psi(t) = f(2t, \cos t)$ où f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$ en fonction des dérivées partielles de f et donner le développement limité à l'ordre 2 de $\psi(t)$ en 0 en fonction de f, de ses dérivées partielles en $(0, 1)$ et du reste. *Écrire uniquement les résultats.*

$\psi'(t) =$

$\psi''(t) =$

DL : $\psi(t) =$

Exercice 2. On a représenté les lignes de niveau d'une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sur la figure ci-dessous.



2.1. Cocher l'affirmation qui vous paraît le plus probable : Pour la fonction F, le point A est un

max local ☐ max global ☐ min local ☐ min global ☐

point selle ☐ impossible de dire quoi que ce soit ☐

2.2. Dessiner sur la figure le chemin suivant la ligne de plus grande pente pour aller du point C au point A.

2.3. On suppose que le point B est un point selle. Représenter l'allure des lignes de niveaux de la fonction F passant par le point B.

2.4. En supposant de plus que $F(B) = 147$, donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de F au point B : $z =$

Exercice 3. Soit $f(x, y) = \dfrac{x-1}{y-1}$.

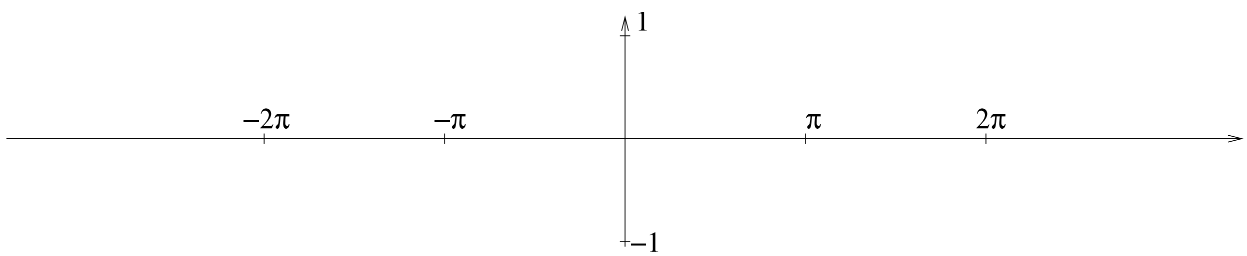
Ensemble de Définition de f : $D_f =$

$\forall (x,y) \in D_f,\quad \nabla f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}}$ (gradient) $\quad \nabla^2 f(x,y) = \boxed{\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}}$ (matrice hessienne)

Écrire la formule de Taylor à l'ordre 2 au point $(0,0)$ pour la fonction f :

Exercice 4. Soit g la fonction 2π-périodique définie par $g(t) = 1 - \left|\frac{t}{\pi}\right|$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

Tracer g



Déterminer les coefficients de Fourier de g

$a_0 = \boxed{}\qquad \forall n \geq 1,\ \ a_n = \boxed{}\qquad b_n = \boxed{}$

Écrire la série de Fourier de g qu'on notera $S(g)(t)$

La fonction g est-elle égale à sa série de Fourier ? *Justifier.*

Calculer les valeurs (*pas de calculs mais indiquer la méthode utilisée*)

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \boxed{}$$ Méthode : $\boxed{}$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \boxed{}$$ Méthode : $\boxed{}$

Exercice 5.

5.1. Soit $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Déterminer les points critiques de g et, pour chacun d'entre eux, préciser leur nature (minimum ou maximum local, point selle).

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \boxed{} \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \boxed{}$$

Soit $f(x,y) = -x + \sqrt{3}\,y$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. On considère les problèmes

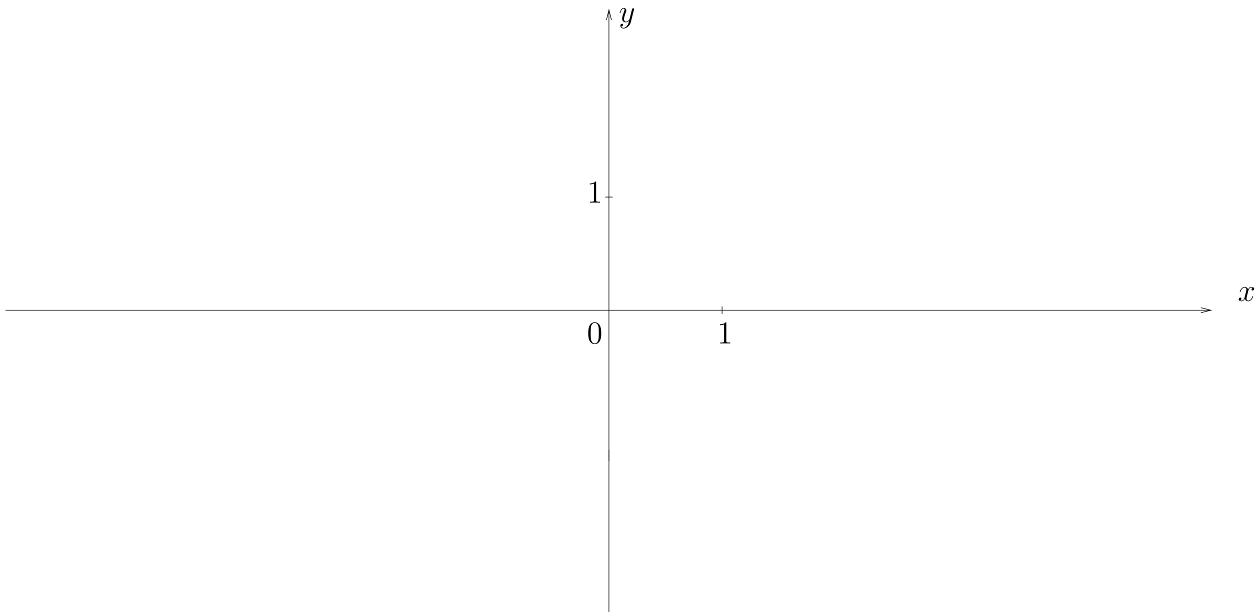
(I) Minimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $h(x,y) = 0$,

(S) Maximiser $f(x,y)$ sous la contrainte $h(x,y) = 0$.

On admettra l'existence de solutions.

5.2. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f et h sur le dessin de la page suivante et représenter les solutions de **(I)** et **(S)**.

5.3. Résoudre les problèmes **(I)** et **(S)** à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda h(x,y)$ dans le cadre de la page suivante.


y
1
x
0
1