NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2017-2018
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Jeudi 18 janvier 2018 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Il n'est pas prévu de déborder des cases réponses. Travailler avec un brouillon !

Exercice 1. Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Démontrer que f est continue en $(0,0)$.

Calculer *(ne donner que les résultats)* les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La fonction f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier !

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y^2 - x^2 + x^4/4$.

Donner (sans justifier) l'ensemble des points critiques de f.

Montrer que f a exactement deux minima locaux et un point selle.

S'agit-il de minima globaux ? Justifier.

Exercice 3. Soient $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\Omega =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $F :]0,+\infty[\times]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer en fonction des dérivées partielles de f :

$$\frac{\partial F}{\partial r} =$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} =$$

En déduire (en fonction des dérivées partielles de F)

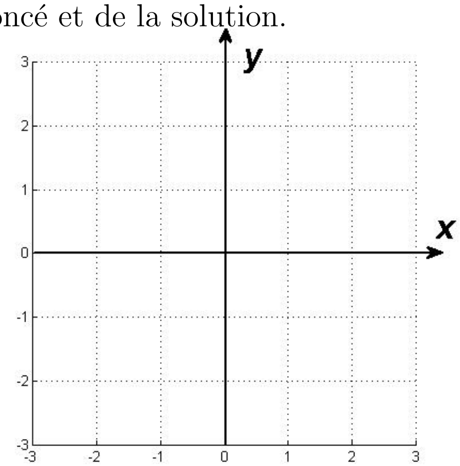
$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

Résoudre sur Ω l'équation aux dérivées partielles $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sachant que $\theta = \arctan(y/x)$

puis l'équation aux dérivées partielles sur Ω : $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + \dfrac{y^2}{x^2}$.

Exercice 4. Calculer par 2 méthodes (géométrie et optimisation) la distance du point $M_0(-2,2)$ au cercle d'équation $(x-2)^2+(y+1)^2=1$. Compléter le dessin avec les éléments de l'énoncé et de la solution.



Exercice 5. Soit $h(x, y) = e^x \cos y + y \sin x - 1 - y$. Montrer qu'il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et, au voisinage de $(0, 0)$, $h(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$.
Citer le nom du/des théoreme(s) utilisé(s) et soyez précis dans l'énoncé des hypothèses

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de φ au voisinage de 0.

****** FIN *******