ne rien écrire
Exo1 :
Exo2 :
Exo3 :
(Exo4) :

NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2023-2024
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mardi 7 novembre 2023 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.
Barême envisagé : Exercice 1 sur 10 pts, Exercice 2 sur 4 pts, Exercice 3 sur 6 pts.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici. CV signifie convergence et DV signifie divergence.
Cocher une case à tort sera pénalisé mais pas de pénalisation pour une valeur numérique fausse.

1.1. Si $u_n \to 0$ alors la série $\sum u_n$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux

1.2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\ln n}$ ☐ CV ☐ DV

1.3. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)$ CV : ☐

1.4. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $I =$ ☐

1.5. $J = \displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $I =$ ☐

1.6. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$. Rayon de convergence $R =$ ☐

Valeur de la somme $f(x) =$ ☐

1.7. Soit $g(x) = \dfrac{1}{x^2-x-6}$. Décomposition en éléments simples $g(x) =$ ☐

Développement en série entière $g(x) =$ ☐

Rayon de CV du développement en série entière $R =$ ☐

1.8. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in\theta}x^n$. Rayon de convergence $R =$ ☐

Valeur de la somme $h(x) =$ ☐

En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)x^n =$ ☐ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 2.

2.1. Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt$ converge.

2.2. Calculer la valeur de I. *[On pourra penser à un changement de variable.]*

Exercice 3.

3.1. Démontrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge à l'aide d'une intégration par parties.

On veut maintenant démontrer que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ ne converge pas absolument.

3.2. Pour tout $N \geq 1$, exprimer $\displaystyle\int_{\pi}^{(N+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ avec les sommes partielles de $\sum u_n$ où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$.

3.3. Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{n\pi + u} du$ puis que $u_n \geq \dfrac{2}{(n+1)\pi}$.

3.4. Conclure.

Exercice 4. (Exercice bonus à ne traiter que si le reste a été fait) Un escargot progresse sur un fil élastique à la vitesse de 0,1 m par minute. Initialement le fil fait 1 m. Au bout de chaque minute, un vilain garnement s'amuse à étirer le fil d'1 m.

On suppose que le fil est étiré uniformément sur toute sa longueur, qu'il est étirable à l'infini, que l'escargot ne glisse pas sur le fil quand on l'étire et enfin que le pauvre escargot ne se fatigue pas.

L'escargot arrivera-t-il un jour au bout du fil ?