ne rien écrire
Exo1 :
Exo2 :
Exo3 :
Exo4 :

NOM Prénom + code barre

Année universitaire 2024-2025
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mardi 5 novembre 2024 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici.
CV signifie convergence et DV signifie divergence.
Cocher une case à tort sera pénalisé mais pas de pénalisation pour une valeur numérique fausse.

1.1. $\sum \frac{1}{(-1)^{n+1}\ln(n)}$ ☐ CV ☐ DV

1.2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x}{\sin(x)+x^3}dx$ ☐ CV ☐ DV

1.3. $\sum \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$ ☐ CV ☐ DV

1.4. Valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\sum \frac{n}{1+n^{2a}}$ CV : ☐

1.5. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^\alpha}$ CV : ☐

1.6. $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $S =$ ☐

1.7. Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence R, alors $\sum (a_n+b_n)x^n$ a aussi un rayon de convergence égal à R. ☐ Vrai ☐ Faux

1.8. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}}$. Rayon de convergence $R =$ ☐

Valeur de la somme $f(x) =$ ☐

1.9. Développement en série entière en $x=0$ de $g(x) = \frac{x}{3x+2} =$ ☐

Rayon de CV du développement en série entière $R =$ ☐

1.10. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} =$ ☐

Exercice 2. Démontrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^3}$ converge.

Calculer la valeur de I.

Exercice 3. Le but est de démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$.

Soit $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ pour $n \geq 1$. Prouver que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

En utilisant un développement limité à l'ordre 3 de l'expression précédente, démontrer que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

En déduire que la suite (u_n) converge puis conclure.

Exercice 4. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3xy'(x) + 3y(x) = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Chercher $y(x)$ sous la forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Démontrer que $a_n = 0$ pour n impair et établir une relation de récurrence pour $b_p = a_{2p}$ afin de déterminer a_n pour n pair. Calculer le rayon de convergence de la série entière obtenue et exprimer la somme à l'aide des fonctions usuelles.