Exo1 : Exo2 : Exo3 : Exo4 :	NOM Prénom + code barre	2ème année STPI 2025-2026 DEVOIR SURVEILLÉ D'ANALYSE 3 ; Lundi 03 Novembre 2025 — durée : 1h30

Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

Tous documents et matériel électronique interdits

Exercice 1.

I.1. Les questions faisant apparaître des cases à cocher peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Des points négatifs seront affectés à de mauvaises réponses comme suit : une question dont toutes les réponses sont bonnes vaut X points et une question dont au moins une réponse est mauvaise vaut $\frac{-X}{2}$ points.

Questions	Réponses
1. La série numérique de terme général $\mathbf{u_n} = \exp(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}) - \mathbf{a} - \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{n}}$ est	☐ convergente pour $\mathbf{a} \neq \mathbf{1}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ ☐ convergente pour $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{1}$ ☐ divergente pour $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ et $\mathbf{b} \neq \mathbf{1}$
2. La valeur de la série numérique de terme général $\mathbf{u_n} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{n-1}}} - \frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{n}}} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{n+1}}}$ vaut	☐ $+\infty$ ☐ $\frac{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$ ☐ $\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$
3. L'intégrale généralisée $\int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \frac{\mathbf{x}\ln(\mathbf{x})}{(\mathbf{1}+\mathbf{x^2})^{\mathbf{2}}}$ est	☐ convergente ☐ divergente
4. La valeur de l'intégrale généralisée $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{\ln(\mathbf{x})}{\mathbf{x^2}}\mathbf{dx}$ vaut	☐ $+\infty$ ☐ $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ ☐ $\mathbf{1} - \ln(\mathbf{3})$
5. Pour la série de Fourier $\mathbf{S(f)}$ et les coefficients de Fourier $\mathbf{a_n(f)}$, pour $\mathbf{n} \geq \mathbf{0}$, associés à la fonction $\mathbf{2}\pi$-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbf{f(x)} = \pi - \lvert \mathbf{x} \rvert$ sur $]-\pi, \pi]$, on a	☐ $\mathbf{S(f)(x)} = \mathbf{f(x)}, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$ ☐ $\mathbf{S(f)(x)} = \mathbf{f(x)}, \ \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{k}\pi$, avec $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$ ☐ $\mathbf{a_0(f)} = \mathbf{1}$
6. Soit $\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \mathbf{a_n x^n}$ une série entière de rayon de convergence $\mathbf{R}$. La série numérique de terme général $\mathbf{u_n} = \mathbf{a_n r_0^n}$, avec $\mathbf{r_0} \in]\mathbf{0}, \mathbf{R}[$, est	☐ normalement convergente ☐ divergente ☐ absolument convergente ☐ convergente
7. Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{f} : [\mathbf{a}, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout x dans $[\mathbf{a}, +\infty[$, on pose : $\mathbf{F(x)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)dt}$. On considère les propositions suivantes : (i) $\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \lvert \mathbf{f(t)} \rvert \mathbf{dt}$ est convergent, (ii) La fonction $\mathbf{F}$ admet une limite finie en $+\infty$. On a	☐ si $\mathbf{f}$ est positive (i) $\not\Rightarrow$ (ii) ☐ si $\mathbf{f}$ est positive (ii) $\Longrightarrow$ (i) ☐ si $\mathbf{f}$ n'est pas de signe constant (i) $\Longrightarrow$ (ii) ☐ si $\mathbf{f}$ n'est pas de signe constant (ii) $\Longrightarrow$ (i)

Exercice 2.

2.1. Soient $r > 0$ et $f : x \in]-r, r[\longmapsto f(x)$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. Supposons qu'il existe $\mathrm{M} > 0$ et $x_0 > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in]-r, r[$ on a $\lvert f^{(n)}(x) \rvert \leq \mathrm{M} x_0^n$. Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ en précisant la valeur des coefficients a_n, $\forall n \in \mathbb{N}$.

.

2.2. On considère la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$ de rayon de convergence R.

(i) Déterminer le rayon de convergence R dans le cas où la suite (a_n) tend vers une limite $l \neq 0$,

(ii) Soit $\alpha > 0$, déterminer le rayon de convergence R_α de la série entière $\sum_{n\geq 1} (a_n)^\alpha x^n$, dans le cas où $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

2.3. On considère la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{x^{2n}}{n(n-1)4^n}$. Déterminer le rayon R et le domaine de convergence Δ de cette série, et calculer sa somme $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(n-1)4^n}$, $\forall x \in]-R, R[$.

Exercice 3.

3.1. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$.

a) Déterminer le développement en série entière en 0 de f.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$, avec la suite u_n à déterminer.

3.2. Déterminer une fonction impaire $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ développable en série entière en 0 (dont on déterminera le rayon de convergence $R > 0$) solution de l'équation : $y'(x) - xy(x) - 1 = 0$.

Exercice 4.

On note par Γ la constante d'Euler vérifiant $\Gamma = \lim_{n\to+\infty}(S_n - \ln(n))$, avec $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in]0,1]$ on a $\frac{1-(1-t)^n}{t} = \sum_{k=0}^{n-1}(1-t)^k$.

b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t} dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Montrer que $A = \int_0^1 \frac{1-\exp(-t)}{t} dt$ et $B = \int_0^1 \frac{\exp(\frac{-1}{t})}{t} dt$ sont convergentes.

d) On pose $A_n = \int_0^1 \frac{1-(1-\frac{t}{n})^n}{t} dt$ et $B_n = \int_1^n \frac{(1-\frac{t}{n})^n}{t} dt$ et on admet que $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ et $\lim_{n\to+\infty} B_n = B$.

Montrer que $A_n = S_n - \int_1^n \frac{1}{t} dt + B_n$. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{1-\exp(-t)-\exp(\frac{-1}{t})}{t} dt$ en fonction de Γ.