

NOM + code barre

Correction  
Version 1



Année universitaire 2010-2011

1ère année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3

Mardi 7 juin 2011 — 10h-11h30

Tous documents et matériel électronique (calculatrices, portables, etc.) interdits

Le sujet comporte 5 exercices

Exercice 1. On considère l'équation (E)  $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = e^{3t}$  sur  $\mathbb{R}$ .

1. Préciser la nature de cette équation.

Équation différentielle ordinaire du 2nd ordre linéaire à coefficients constants

2. Quelle est la structure algébrique de l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée ?

C'est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel des fonctions  $\mathbb{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ .

3. Résoudre l'équation homogène.

équation caractéristique :  $n^2 - 2n - 3 = (n-3)(n+1) = 0$

solution générale de l'équation homogène :

$$y_h(t) = A e^{-t} + B e^{3t}, \quad A, B \text{ constantes réelles}$$

4. Trouver une solution particulière de l'équation (E).

Méthode de variations des constantes :  $y_p(t) = A(t)e^{-t} + B(t)e^{3t}$   
système pour  $A'(t), B'(t)$  :

$$\begin{cases} A'e^{-t} + B'e^{3t} = 0 \\ -A'e^{-t} + 3B'e^{3t} = e^{3t} \end{cases}$$

$$\text{D'où } B'(t) = \frac{1}{4}, \text{ on prend } B(t) = \frac{t}{4}$$

$$A'(t) = -\frac{1}{4}e^{4t}, \text{ on prend } A(t) = -\frac{1}{16}e^{4t}$$

$$y_p(t) = \left(-\frac{1}{16} + \frac{t}{4}\right)e^{3t}$$

5. Donner la solution générale de (E).

$$y_g(t) = Ae^{-t} + Be^{3t} + \left(-\frac{1}{16} + \frac{t}{4}\right)e^{3t}, \quad A, B \text{ constantes}$$

**Exercice 2.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Cocher et remplir les cases le cas échéant.

On ne peut pas faire de décomposition LU de A.

On a :  $A = LU$  avec  $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$  et  $U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 3.** On considère le système

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = a \end{cases} \quad \text{où } a \text{ est un réel donné.}$$

1. Donner l'ensemble des solutions du système lorsque  $a = 5$ .

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R} \right\} \quad \begin{matrix} \text{droite affine} \\ \text{solution} \end{matrix}$$

2. Donner l'ensemble des solutions du système lorsque  $a = 4$ .

$\emptyset$  (pas de solution)

**Exercice 4.** Inscrivez un nombre entier compris entre 0 et 100 dans cette case :  en sachant que vous aurez d'autant plus de points à cet exercice que ce nombre sera proche de la moitié de la moyenne de tous les nombres inscrits par les personnes qui passent cet examen aujourd'hui.

Justifiez votre choix en quelques lignes.

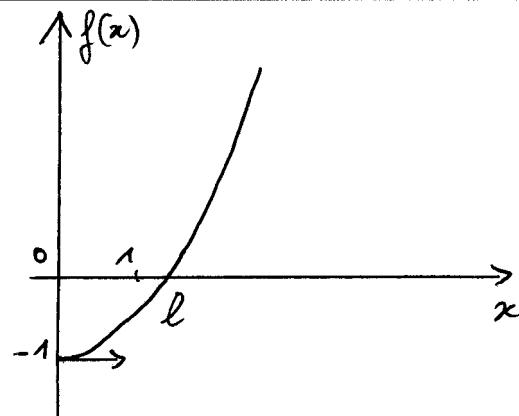
Si les nombres étaient inscrits au hasard, la moyenne M serait proche de 50 et  $\frac{M}{2} \approx 25$ . Mais si tout le monde fait ce raisonnement et inscrit 25,  $M = 25$  et  $\frac{M}{2} \approx 12$  donc il faut écrire 12. En réitérant le raisonnement, on se convainc qu'il faut écrire 6, puis 3, 2, 1, 0. La solution théorique est donc 0 ; en réalité ça sera plus, à voir --

Mathématiquement cela peut être vu comme un théorème de point fixe. S'il y a  $N$  étudiants qui inscrivent un nombre  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , alors la moyenne est  $x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ . Si chaque étudiant inscrit la moitié de la moyenne alors  $x_i = \frac{x}{2}$  d'où  $x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x}{2} = \frac{x}{2}$  ; on est amené à trouver le point fixe de la fonction  $g(x) = \frac{x}{2}$  qui est 0.

**Exercice 5.** On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^x - x - 2$  pour  $x \in [0, +\infty[$  et on cherche à résoudre  $f(x) = 0$  sur  $[0, +\infty[$ .

1. Tracer l'allure de la fonction  $f$  sur  $[0, +\infty[$  (on pourra faire une étude rapide).

$f$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$   
 $\forall x \in [0, +\infty[, f'(x) = e^x - 1 \geq 0$   
 $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$   
 $f(0) = -1$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



2. Démontrer que  $f$  a une unique racine  $\ell$  sur  $[0, +\infty[$ .

- $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$
- $f(0) = -1 < 0$
- $f(2) = e^2 - 2 - 2 \geq (e+)^2 - 4 > 0$
- donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f$  admet une racine  $\ell \in [0, 2]$ .
- $f'(0) = 0$  et  $f'(x) > 0$  sur  $[0, 2]$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 2]$  donc la racine est unique.

3. On cherche à construire une suite récurrente  $x_{n+1} = g(x_n)$  telle que  $x_n \rightarrow \ell$  quand  $n \rightarrow +\infty$  et  $\ell$  est un point fixe de  $g$  ( $g(\ell) = \ell$ ).

3a. Pourquoi  $g(x) = e^x - 2$  ne convient pas ?

$\forall x \in [0, 2], f(x) = e^x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow g(x) = e^x - 2 = x$   
 $g$  est bien de classe  $C^1$  sur  $[0, 2]$  mais :  
 $\forall x \in [0, 2], g'(x) = e^x \geq 1$   
 donc  $g$  ne peut pas être  $k$ -contractante avec  $k < 1$   
 au voisinage de  $\ell \in [0, 2]$ .  
 $g$  ne peut pas convenir.

3b. Démontrer que  $g(x) = \ln(x+2)$  convient.

$\forall x \in [0,2], g(x) = e^x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = x+2 \Leftrightarrow x = g(x) = \ln(x+2)$

$g$  est de classe  $C^1$  sur  $[0,2]$ :  $\forall x \in [0,2], g'(x) = \frac{1}{x+2}$

et:  $\forall x \in [0,2], 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

Donc, par le théorème des accroissements finis:

$$\forall x, y \in [0,2], |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2} |x-y|$$

Donc  $g$  est  $k$ -contractante avec  $k = \frac{1}{2} < 1$  sur  $[0,2]$ ; elle convient

4. Expliquer comment appliquer l'algorithme de Newton à la fonction  $f$  pour définir une suite  $y_n$  qui converge vers  $\ell$  (on demande de préciser les hypothèses de l'algorithme de Newton et de définir explicitement la suite  $y_n$ ).

$f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$   
 $f$  a une seule racine dans  $]0, +\infty[$   
 $\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) > 0$

donc on peut appliquer l'algorithme de Newton sur un intervalle  $I \subset ]0, +\infty[$  contenant  $\ell$  (à déterminer) = on définit une suite  $(y_n)$  par récurrence  $\begin{cases} y_0 \in I \\ y_{n+1} = h(y_n) \end{cases}$

$$\text{où } h(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} = y - \frac{e^y - y - 2}{e^y - 1}.$$

Si  $I$  est bien choisi (ici  $I = ]0, +\infty[$  convient), on aura:  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$ .