Année universitaire 2018-2019
3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 8 novembre 2018 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Seuls documents permis : les notes de cours et de TD personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD. Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{t^2+e^t}{t^4+1} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{t^2+e^t}{t^4+1} \in \mathrm{L}^1(]-\infty,0[)$ ☐ $\dfrac{\ln t}{t} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\ln t}{t} \in \mathrm{L}^2(]1,+\infty[)$

☐ $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^1(]-1,1[)$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^2(]-1,1[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{1+t^n}dt$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2

☐ $1-e^{-1}$ ☐ $e^{-1}-1$ ☐ $\dfrac{1-e^{-2}}{2}$ ☐ $\dfrac{e^{-2}-1}{2}$ ☐ $+\infty$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ vaut

☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\pi\sqrt{\pi}$ ☐ $-\pi$ ☐ π ☐ -2π ☐ 2π ☐ $+\infty$

4. Pour $x \in]0,+\infty[$, on définit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-xt^2}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$. Alors $g'(x)$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $\displaystyle -\int_0^{\infty} 2xe^{-xt^2}\frac{\sin^2 t}{t}dt$ ☐ $\displaystyle \int_0^{\infty} 2xe^{-xt^2}\frac{\sin^2 t}{t}dt$

☐ $\displaystyle -\int_0^{\infty} e^{-xt^2}\sin^2 t\, dt$ ☐ $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-xt^2}\sin^2 t\, dt$ ☐ $\displaystyle -2\int_0^{\infty} e^{-xt^2}\frac{\sin^2 t}{t}dt$

5. La transformée de Fourier de $t\, e^{-\pi t^2}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $-i\xi\, e^{-\pi\xi^2}$ ☐ $i\xi\, e^{-\pi\xi^2}$

☐ $\xi\, e^{-\pi\xi^2}$ ☐ $-\xi\, e^{-\pi\xi^2}$ ☐ $-i\xi\, e^{-\pi^2\xi^2}$ ☐ $i\xi\, e^{-\pi^2\xi^2}$

6. La transformée de Fourier de $\dfrac{t}{1+t^2}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $i\pi\, e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}$

☐ $-i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $-i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|}$ ☐ $+\infty$

7. Déduire de la question 6, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{t}{1+t^2}\right)^2 dt$

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ 1 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\dfrac{i\pi}{2}$ ☐ $i\pi$ ☐ $+\infty$

Analyse complexe

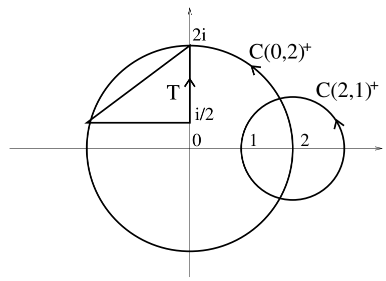
On définit le logarithme complexe principal $\operatorname{Log}(z)$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (le plan complexe fendu privé du demi-axe des réels négatifs) en choisissant l'argument de z dans $]-\pi,\pi[$. Asssocié à ce logarithme, on définit la fonction $z^{1/2}=e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$.

8. Soit $j=e^{2i\pi/3}$.

☐ $\bar{j}=j$ ☐ $\bar{j}=j^2$ ☐ $\bar{j}=-j^2$ ☐ $\bar{j}=e^{4i\pi/3}$

☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=j$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=\bar{j}$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=e^{-i\pi/3}$ ☐ n'existe pas

9. Soit $f(z)=\dfrac{z^{1/2}}{z^2+z+1}$ et $I=\displaystyle\int_T f(z)dz$, $J=\displaystyle\int_{C(0,2)^+} f(z)dz$ et $K=\displaystyle\int_{C(2,1)^+} f(z)dz$, où les 3 chemins sont représentés sur la figure.



☐ f n'est holomorphe nulle part ☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{j,\bar{j}\})$

☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}^-\cup\{j,\bar{j}\}))$ ☐ $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-)$ ☐ $I=0$

☐ I n'existe pas ☐ $I=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{i\pi/3}$ ☐ $I=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\pi/6}$

☐ J n'existe pas ☐ $J=0$ ☐ $J=2\pi i$

☐ K n'existe pas ☐ $K=0$ ☐ $K=\dfrac{2\pi i}{3}$

10. Le développement en série entière de la fonction $g(z)=\dfrac{1}{(5-z)^2}$ au point $z=0$ est

☐ $\displaystyle\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(n+1)z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{5^{n+2}}z^n$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{5^{n+2}}z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{5^{n+2}}(z-5)^n$ ☐ il n'existe pas.

11. Le rayon de convergence R de la série entière obtenue dans la question 10 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{5}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\sqrt{5}$ ☐ 5 ☐ $+\infty$.

12. La valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{dt}{(4+t^2)^2}$ est

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\dfrac{4\pi}{9}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{27}$ ☐ $\dfrac{4\pi}{27}$ ☐ $-\dfrac{2i}{27}$ ☐ $-\dfrac{2\pi}{9}$ ☐ $+\infty$

Correction du DS de novembre 2018 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\dfrac{t^2+e^t}{t^4+1} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ donc n'appartient pas à $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. $t \in]-\infty,0] \mapsto \dfrac{t^2+e^t}{t^4+1}$ est continue et $\dfrac{t^2+e^t}{t^4+1} \underset{t\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc la fonction appartient à $\mathrm{L}^1(]-\infty,0[)$.
$t \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue et positive. Comme $\dfrac{\ln t}{t} \geq \dfrac{1}{t}$, $\dfrac{\ln t}{t} \notin \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. Comme $0 \leq \left(\dfrac{\ln t}{t}\right)^2 = \dfrac{\ln^2 t}{\sqrt{t}}\dfrac{1}{t^{3/2}} \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ pour t assez grand (par croissances comparées), $\dfrac{\ln t}{t} \in \mathrm{L}^2(]1,+\infty[)$.
Comme $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}$, la fonction $\dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en une fonction positive sur $\mathbb{R}$. Comme $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \leq \dfrac{2}{t^2}$, la fonction et son carré sont intégrables en $\pm\infty$. Donc $\dfrac{1-\cos t}{t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to\pm1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1\mp t)}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \in \mathrm{L}^1(]-1,1[)$. Comme $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2 \underset{t\to\pm1}{\sim} \dfrac{1}{2(1\mp t)}$, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \notin \mathrm{L}^2(]-1,1[)$.

2. Pour presque tout $t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) := \dfrac{e^{-2t}}{1+t^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \mathbf{1}_{[0,1]}(t)e^{-2t}$ et $0 \leq f_n(t) \leq e^{-2t} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^1 e^{-2t}dt = \frac{1-e^{-2}}{2}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{x^2+y^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr = \left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

4. L'intégrande $h(x,t) = e^{-xt^2}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ est définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et est intégrable en t car $0 \leq h(x,t) \leq \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. De plus, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -t^2e^{-xt^2}\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2$ existe pour tout (x,t) et est dominée pour $0<\epsilon<x$: $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-\epsilon^2 t^2} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégral (dont nous venons de vérifier les hypothèses), $g(x)$ est dérivable sur $]\epsilon,+\infty[$ pour tout $\epsilon>0$ donc $g'(x)$ existe sur $]0,+\infty[$ et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{\infty} e^{-xt^2}\sin^2 t\,dt$.

5. On applique la formule de dérivation de la transformée de Fourier et la transformée de la gaussienne (cf. tableau) pour obtenir $\widehat{te^{-\pi t^2}} = \dfrac{1}{-2i\pi}\widehat{e^{-\pi t^2}}'(\xi) = \dfrac{i}{2\pi}\left(e^{-\pi\xi^2}\right)' = -i\xi e^{-\pi\xi^2}$.

6. D'après le tableau, on obtient $i\pi\mathcal{F}\left(\mathrm{sgn}(t)e^{-2\pi|t|}\right) = \dfrac{\xi}{1+\xi^2}$. Par inversion dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on obtient
$\mathcal{F}\left(\dfrac{t}{1+t^2}\right)(\xi) = i\pi\,\mathcal{F}\mathcal{F}\left(\mathrm{sgn}(t)e^{-2\pi|t|}\right)(\xi) = i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|-\xi|} = i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}$ qui est aussi égal à $-i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)e^{-2\pi|\xi|}$. Il y avait donc 2 cases à cocher.

7. Par la formule de Parseval, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{t}{1+t^2}\right|^2 dt = \int_{\mathbb{R}}\left|i\pi\,\mathrm{sgn}(-\xi)e^{-2\pi|\xi|}\right|^2 d\xi = \pi^2\int_{\mathbb{R}} e^{-4\pi|\xi|}d\xi = 2\pi^2\int_0^{\infty}e^{-4\pi\xi}d\xi = \frac{\pi}{2}$.

8. On a $j^2 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^2 = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3} = \bar{j} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ et $\left(j^2\right)^{1/2} = \left(e^{-i2\pi/3}\right)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(e^{-i2\pi/3})} = e^{\frac{i}{2}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{-i\pi/3}$. Il y avait donc 3 cases à cocher : la 2, 4 et 7.

9. $z^{1/2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (comme le Logarithme principal) et z^2+z+1 est un polynôme donc est holomorphe sur $\mathbb{C}$. Le quotient est donc holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ privé des racines j et $\bar{j}$ de z^2+z+1, c'est-à dire sur $\mathbb{C}\setminus(\mathbb{R}^-\cup\{j,\bar{j}\})$. Il fallait donc cocher la 4ème case.
Le chemin fermé $T = [i/2, 2i, -2+i/2, i/2]$ délimite un compact à bord inclus dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (il ne contient pas de réel négatif) contournant j qui est un pôle d'ordre 1 de f. Comme $\mathrm{Res}(f,j) = (z-j)f(z)|_{z=j} = \dfrac{j^{1/2}}{j-\bar{j}} = \dfrac{e^{i\pi/3}}{i\sqrt{3}}$, par la formule des résidus, on obtient $I = \frac{2\pi e^{i\pi/3}}{\sqrt{3}}$.
Le chemin $C(0,2)^+$ coupe l'axe réel négatif donc f n'est pas défini sur tout le chemin donc J n'existe pas.
Le chemin fermé $C(2,1)^+$ délimite le compact à bord $\overline{D}(2,1)$ inclut dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (il ne contient pas de réel négatif) sur lequel f est holomorphe (car il ne contient ni j ni $\bar{j}$). Par le théorème de Cauchy, $K=0$.

10. On a $\dfrac{1}{5-z} = \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{1-z/5} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{5^{n+1}}$. Comme $\left(\dfrac{1}{5-z}\right)' = \dfrac{1}{(5-z)^2}$, on en déduit le développement en série entière demandé en $z=0$ en dérivant le développement précédent : $\dfrac{1}{(5-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{5^{n+1}}z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{5^{n+2}}z^n$.

11. $R = 5$. Cela se voit directement sur la série entière ou en remarquant que $D(0,5)$ est le plus grand disque centré en 0 et contenu dans le domaine d'holomorphie $\mathbb{C} \setminus \{5\}$ de $\dfrac{1}{(5-z)^2}$.

12. C'est une intégrale du 2ème type dans le cours qui vaut $\frac{\pi}{16}$. Pour la calculer on introduit $R(z) = \dfrac{1}{(4+z^2)^2} = \dfrac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$ avec des pôles d'ordre 2 en $2i$ et $-2i$. Comme $2i$ est le seul pôle au-dessus de l'axe des abscisses, l'intégrale vaut $2\pi i \operatorname{Res}(R, 2i)$ et ce résidu est le coefficient d'ordre 1 du développement limité (ou en série entière) de $(z-2i)^2 R(z)$ en $z = 2i$. Or $(z-2i)^2 R(z) = \dfrac{1}{(2i+z)^2} = -\dfrac{1}{16} \dfrac{1}{(1+\frac{z-2i}{4i})^2} = -\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32i}(z-2i) + o(z-2i)$.

La bonne réponse manquait sur le sujet ! Cette question a donc été supprimée dans le barême (pas de pénalisation pour ceux qui ont coché une case fausse ou ajouté une réponse fausse) et un bonus est accordé si la réponse est donnée.