Année universitaire 2024-2025
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 7 novembre 2024 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{1}{t^{1/3}+t} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{t\,\ln t} \in \mathrm{L}^1(]2,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ ☐ $\dfrac{\ln t}{t} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$

☐ $\dfrac{1}{t^{1/3}+t} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{t\,\ln t} \in \mathrm{L}^2(]2,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$ ☐ $\dfrac{\ln t}{t} \in \mathrm{L}^2(]1,+\infty[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^n \frac{2+\sin x}{x+e^{-x}}dx$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ -1 ☐ $-\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

3. À l'aide d'un changement en polaires, le calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ donne

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

4. Pour $t>0$, on pose $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(x^2+i)}}{x^2+i}dx$. On a :

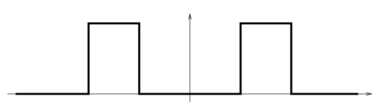
☐ $\varphi'(t) = -2t\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(x^2+i)}}{x^2+i}dx$ ☐ $\varphi'(t) = 2t\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(x^2+i)}}{x^2+i}dx$ ☐ $\varphi'(t) = -2t\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2(x^2+i)}dx$

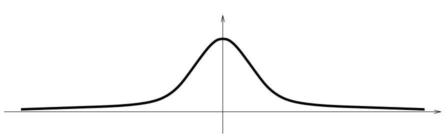
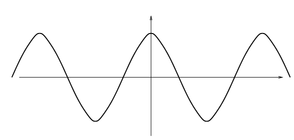
☐ $\varphi'(t) = 2t\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2(x^2+i)}dx$ ☐ $\varphi'(t) = -t^2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2(x^2+i)}dx$ ☐ $\varphi'(\sqrt{\pi}) = 0$

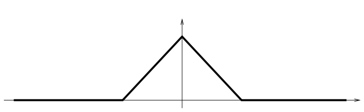
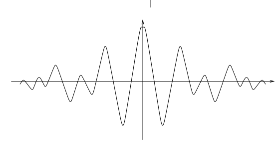
☐ $\varphi'(\sqrt{\pi}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\varphi'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$ ☐ $\varphi'(\sqrt{\pi}) = -\sqrt{\pi}$

5. La transformée de Fourier de $e^{-|t-3|}+e^{-|t+3|}$ vaut

☐ $\dfrac{4}{1+\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4\cos(2\pi\xi)}{1+\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4e^{6i\pi\xi}}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4\cos(6\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{4\sin(6\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}$

6. Donner l'allure de la transformée de Fourier du signal 

☐  ☐ 

☐  ☐ 

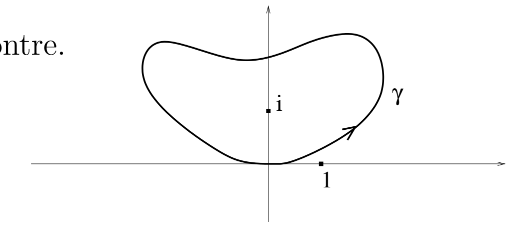
☐ on ne peut pas tracer car $\hat{f}$ est complexe

7. Le calcul du produit de convolution $H(x)e^{-x} * H(-x)e^{x}$ donne

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $(H(x)e^{-x})^2$ ☐ $\dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ ☐ $e^{-|x|}$ ☐ $\dfrac{1}{2}e^{x}$ ☐ e^{x}

Analyse complexe

8. Soit $f(z) = \dfrac{e^{2z^2}}{z^2 + 1/4}$ et γ le chemin représenté sur le dessin ci-contre.
On considère $I = \displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ et $J = \displaystyle\int_\gamma (z - \frac{i}{2}) f(z)dz$.



☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}\})$

☐ $I = 0$ ☐ $I = 2\pi\, e^{-1/2}$ ☐ $I = 2\pi\, e^{-1/4}$ ☐ $I = 2\pi i$ ☐ I n'existe pas.

☐ $J = 0$ ☐ $J = 2\pi\, e^{-1/2}$ ☐ $J = 2\pi\, e^{-1/4}$ ☐ $J = 2\pi i$ ☐ J n'existe pas.

On définit le logarithme complexe principal $\mathrm{Log}\,(z)$ comme dans le cours sur le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (privé des réels négatifs) en prenant l'argument principal de z dans $]-\pi, \pi[$.

9. La fonction $f(z) = \dfrac{\mathrm{Log}\,(z)}{z - 1}$

☐ n'est holomorphe nulle part ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C}$

☐ a une singularité éliminable en $z = 1$ ☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$

☐ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ☐ a un pôle d'ordre 1 en $z = 1$.

10. Pour la fonction f définie à la question 9 :

☐ $f(1-i)$ n'existe pas ☐ $f(1-i) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{i}{2}\ln 2$ ☐ $f(1-i) = 0$

☐ $f(1-i) = \dfrac{i}{2}\ln 2$ ☐ $f(1-i) = -\dfrac{7\pi}{4} + \dfrac{i}{2}\ln 2$ ☐ $f(1-i) = \ln\sqrt{2}$.

11. Le développement en série entière au voisinage de $z = 1$ de la fonction f définie à la question 9 est :

☐ il n'existe pas ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}(z-1)^n$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n+1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n+1}$.

12. Soit $\omega > 0$. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega x}}{(1+ix)^4} dx$?

☐ 0 ☐ $\pi\omega$ ☐ $\dfrac{2\pi}{3}\omega^3 e^{-\omega}$ ☐ $\dfrac{\pi}{3}\omega^3 e^{-\omega}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{3}\omega^3 e^{\omega}$ ☐ $\dfrac{\pi}{3} i\omega^3 e^{-\omega}$ ☐ n'est pas définie

Correction du DS de novembre 2024 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\dfrac{1}{t^{1/3}+t}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{1}{t^{1/3}+t}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/3}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ et $\left|\dfrac{1}{t^{1/3}+t}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t} \notin \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. Mais $\dfrac{1}{t^{1/3}+t}$ est dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ car $\left|\dfrac{1}{t^{1/3}+t}\right|^2 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{2/3}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ et $\left|\dfrac{1}{t^{1/3}+t}\right|^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$.

Pour $A \geq 2$, $\displaystyle\int_2^A \left|\frac{1}{t\,\ln t}\right| dt = \int_2^A \frac{1}{t}(\ln t)^{-1}dt = \ln\ln A - \ln\ln 2 \underset{A\to+\infty}{\to} +\infty$ donc $\frac{1}{t\,\ln t} \notin \mathrm{L}^1(]2,+\infty[)$. D'autre part, pour $t \geq e$, $\left|\dfrac{1}{t\,\ln t}\right|^2 \leq \dfrac{1}{t^2} \in \mathrm{L}^1(]2,+\infty[)$ donc, par comparaison, $\frac{1}{t\,\ln t} \in \mathrm{L}^2(]2,+\infty[)$.

La fonction positive $t \in]0,1] \mapsto \dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t}$ est continue, il n'y a à vérifier l'intégrabilité qu'en 0. En faisant un DL, on voit que $1-e^{-\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \sqrt{t}$, d'où $\dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ et $\dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$. En revanche $\left|\dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t}\right|^2 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t} \notin \mathrm{L}^1(]0,1[)$ donc $\dfrac{1-e^{-\sqrt{t}}}{t} \notin \mathrm{L}^2(]0,1[)$.

$t \in [1,+\infty[\mapsto \dfrac{\ln t}{t}$ est continue et positive. Comme $\dfrac{\ln t}{t} \geq \dfrac{1}{t}$ pour $t \geq e$, $\dfrac{\ln t}{t} \notin \mathrm{L}^1(]1,+\infty[)$. Comme $0 \leq \left(\dfrac{\ln t}{t}\right)^2 = \dfrac{\ln^2 t}{\sqrt{t}}\dfrac{1}{t^{3/2}} \leq \dfrac{1}{t^{3/2}}$ pour t assez grand (par croissances comparées), $\dfrac{\ln t}{t} \in \mathrm{L}^2(]1,+\infty[)$.

2. $\displaystyle\int_0^n \frac{2+\sin x}{x+e^{-x}}dx = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ avec $f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)f(x)$, où $f(x) = \dfrac{2+\sin x}{x+e^{-x}} \geq 0$. Il suit que, pour presque tout $x \in [0,+\infty[$, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ (suite croissante) et $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x)$ (limite simple). Par le théorème de convergence monotone, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$ car $f(x) \geq \dfrac{1}{x+e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x}$ n'est pas en intégrable en $+\infty$.

3. Avec un changement de variables en coordonnées polaires, on obtient
$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} \frac{r d\theta\, dr}{(1+r^2)^2} = \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 2r(1+r^2)^{-2} = \pi\left[-(1+r^2)^{-1}\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

4. La fonction φ est une intégrale à paramètre $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t,x)dx$ avec $h(t,x) = \dfrac{e^{-t^2(x^2+i)}}{x^2+i}$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral (exercice : les hypothèses sont satisfaites), on obtient :
$$\varphi'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial t}(t,x)dx = \int_0^{+\infty} -2te^{-t^2(x^2+i)}dx = -2te^{-it^2}\int_0^{+\infty} e^{-(tx)^2}dx = -2e^{-it^2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = -\sqrt{\pi}e^{-it^2},$$
en effectuant le changement de variables $u = tx$ (pour $t > 0$ fixé) et en utilisant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Cela faisait une première case à cocher. En évaluant en $t = \sqrt{\pi}$, on trouve $\varphi'(\sqrt{\pi}) = \sqrt{\pi}$ (2ème case à cocher).

5. En utilisant la formule du décalage en temps pour la transformée de Fourier, on a
$$\widehat{e^{-|t-3|}} = e^{-6i\pi\xi}\widehat{e^{-|t|}} = \frac{2e^{-6i\pi\xi}}{1+4\pi^2\xi^2} \quad \text{et} \quad \widehat{e^{-|t+3|}} = e^{6i\pi\xi}\widehat{e^{-|t|}} = \frac{2e^{6i\pi\xi}}{1+4\pi^2\xi^2} \quad \text{d'où} \quad \widehat{e^{-|t-3|}+e^{-|t+3|}} = \frac{4\cos(6\pi\xi)}{1+4\pi^2\xi^2}.$$

6. La fonction f est paire donc $\hat{f}$ est réelle. La fonction f est nulle en dehors d'un compact donc est dans $L^2(\mathbb{R})$ et décroît très rapidement. Il suit que $\hat{f}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et est très régulière ; cela exclut la fonction périodique qui n'est pas dans $L^2(\mathbb{R})$ et le "chapeau" qui n'est pas dérivable partout. Enfin, la gaussienne est sa propre transformée de Fourier donc il ne reste que le 2ème cas de possible. On pouvait aussi dire que la transformée d'une fonction créneau est un sinus cardinal (déphasé). Par linéarité de la transformation de Fourier, comme f est la somme de 2 créneaux, $\hat{f}$ est une somme de sinus cardinaux (déphasés) ce qui donne l'allure du 4ème cas. Un calcul donne $\hat{f}(\xi) = \cos(3\xi)\mathrm{sinc}(\xi)$ (à des constantes près).

7. *1ère méthode : calcul direct.* $H(x)e^{-x} * H(-x)e^x = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} H(-(x-y))e^{x-y}H(y)e^{-y}dy = e^x\int_0^{+\infty} H(-x+y)e^{-2y}dy.$
Comme $H(-x+y) = 1$ si $y \geq x$ et vaut 0 sinon, on obtient 2 cas suivant que $x \geq 0$ ou $x \leq 0$, d'où
$$H(x)e^{-x} * H(-x)e^x = \begin{cases} e^x\int_x^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ e^x\int_0^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{1}{2}e^{x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$
2ème méthode : avec la transformée de Fourier. Comme la tranformée de Fourier d'une convolution est le produit des transformée des Fourier, on a $\mathcal{F}(H(x)e^{-x} * H(-x)e^x) = \mathcal{F}(H(x)e^{-x})\cdot\mathcal{F}(H(-x)e^x) = \dfrac{1}{1+2i\pi\xi}\cdot\dfrac{1}{1-2i\pi\xi} = \dfrac{1}{1+4\pi^2\xi^2} = \dfrac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|x|})$ d'après le tableau des transformées de Fourier. Par injectivité de la transformée de Fourier, on obtient $H(x)e^{-x} * H(-x)e^x = \frac{1}{2}e^{-|x|}$.

8. On a $f(z) = \dfrac{e^{2z^2}}{(z-i/2)(z+i/2)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-i/2, i/2\})$, f a donc 2 pôles d'ordre 1 en $-i/2$ et $i/2$ et seul $i/2$ est dans le compact à bord Δ de frontière $\partial\Delta = \gamma$. Donc $I = \displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Rés}(f,\frac{i}{2}) = 2\pi i\ (z-\frac{i}{2})f(z)\Big|_{z=i/2} = 2\pi\, e^{-1/2}$. Comme la "fonction corrigée" $(z-\frac{i}{2})f(z)$ est holomorphe dans Δ, on a $J = \displaystyle\int_\gamma (z-\frac{i}{2})f(z)dz = 0$ par le théorème de Cauchy.

9. La fonction Log définie dans le cours est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $z \mapsto z-1$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et s'annule en $z=1$. Donc la fonction f est au moins holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ privé de 1. Mais $\mathrm{Log}(z)/(z-1) \to 1$ quand $z \to 1$ donc 1 *est une singularité éliminable de* f et f *est holomorphe sur* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (2 cases à cocher).

10. Simple calcul : $f(1-i) = \frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}\ln 2$.

11. $\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(1+z-1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-1)^n}{n}$ d'où, en divisant par $z-1$ et en faisant un changement d'indice, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n+1}$ (avec un rayon de convergence égal à 1).

12. *Calcul avec l'analyse complexe.* L'intégrale I demandée est du type 2 du cours avec une fraction rationnelle sans pôle réel (la seule singularité est i) et de degré -4 inférieur ou égal à -2. On pose $f(z) = \dfrac{e^{i\omega z}}{(1+iz)^4} = \dfrac{e^{i\omega z}}{(z-i)^4}$ donc i est un pôle d'ordre 4 et il est au-dessus de l'axe des abscisses. D'où $I = 2\pi i \,\mathrm{Rés}(f,i)$. On a : $g(z) = (z-i)^4 f(z) = e^{i\omega z} = e^{-\omega} e^{i\omega(z-i)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-i)^n$ avec $c_n = \dfrac{e^{-\omega}(i\omega)^n}{n!}$. Il suit $\mathrm{Rés}(f,i) = c_{4-1} = c_3 = \frac{e^{-\omega}(i\omega)^3}{6}$. Finalement $I = \dfrac{\pi}{3}\omega^3 e^{-\omega}$.
Calcul avec la transformée de Fourier. On remarque que $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{(2\pi)^4}{(2\pi + 2i\pi x)^4} e^{-2i\pi\left(\frac{\omega}{-2\pi}\right)\xi} dx = (2\pi)^4 \mathcal{F}\left(\frac{1}{(a+2i\pi x)^{3+1}}\right)(\xi)$ avec $a = 2\pi$ et $\xi = \dfrac{\omega}{-2\pi}$. Mais, d'après le tableau des transformées de Fourier, $\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{(a+2i\pi x)^{3+1}}\right)(\xi) = \mathcal{F}\mathcal{F}\left(H(x)\dfrac{x^3}{3!}e^{-ax}\right)(\xi) = H(-\xi)\dfrac{(-\xi)^3}{3!}e^{a\xi}$, la dernière égalité provenant du théorème d'inversion. En remplaçant a et ξ par leurs valeurs et en se souvenant que $\omega > 0$, on trouve bien $I = \dfrac{\pi}{3}\omega^3 e^{-\omega}$.