INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2025-2026
Tronc Commun 3ème année

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 6 novembre 2025 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes <u>personnelles manuscrites</u>,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel <u>du module</u>.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $t^8 \sin(t) e^{-|t|} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{e^{-t}}{t^2+e^{-t}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1-t}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$

☐ $t^8 \sin(t) e^{-|t|} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{e^{-t}}{t^2+e^{-t}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1-t}} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}}dx$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ -1 ☐ $-\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ $-\dfrac{1}{3}$ ☐ $\dfrac{1}{3}$ ☐ 2 ☐ -2 ☐ $+\infty$

3. Soit $a, b > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)dt$. On a :

☐ $F'(x)$ n'existe pas ☐ $F'(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty}(-ae^{-at}+be^{-bt})\sin(xt)dt$ ☐ $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})\sin(xt)dt$

☐ $F'(x) = 0$ ☐ $F'(x) = -x\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\sin(xt)dt$ ☐ $F'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})\sin(xt)dt$

soit encore

☐ $F'(x)$ n'existe pas ☐ $F'(x) = \dfrac{1}{b-ix} - \dfrac{1}{a-ix}$ ☐ $F'(x) = \dfrac{x}{b^2+x^2} - \dfrac{x}{a^2+x^2}$

☐ $F'(x) = 0$ ☐ $F'(x) = -\dfrac{x}{b^2+x^2} + \dfrac{x}{a^2+x^2}$ ☐ $F'(x) = \dfrac{x}{b^2-x^2} - \dfrac{x}{a^2-x^2}$

On en déduit, à une constante additive C près,

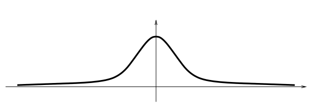
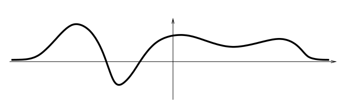
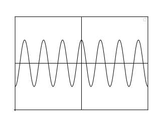
☐ $F(x)$ n'existe pas ☐ $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$ ☐ $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\right) + C$

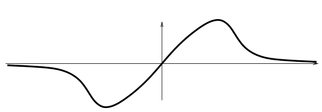
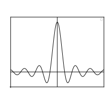
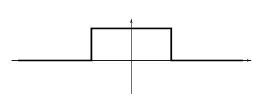
☐ $F(x) = C$ ☐ $F(x) = \ln\left(\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$ ☐ $F(x) = 2\ln\left(\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+ix}dx$ vaut

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ i ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2/4}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-1/2}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-1/4}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{1/4}$

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire qui est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Parmi les figures suivantes, y en a-t-il qui pourraient représenter la transformée de Fourier de f ?

☐  ☐  ☐ 

☐  ☐  ☐ 

6. En utilisant la transformée de Fourier, le calcul du produit de convolution $\dfrac{1}{1+x^2} * \dfrac{1}{1+x^2}$ donne

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $e^{-2\pi|x|}$ ☐ $e^{-4\pi|x|}$ ☐ $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{2}{4+x^2}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{2+x^2}$ ☐ $\dfrac{2\pi}{4+x^2}$ ☐ $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

Analyse complexe

7. Soit $f(z) = \dfrac{1}{1-i+z}$.

☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1-i\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-1+i\})$

☐ $\mathrm{Res}(f, 1-i) = 2\pi i$ ☐ $\mathrm{Res}(f, 1-i) = 1$ ☐ $\mathrm{Res}(f, -1+i) = 2\pi i$ ☐ $\mathrm{Res}(f, -1+i) = 1$

Le développement en série entière de la fonction f en $z = 0$ vaut

☐ il n'existe pas ☐ $\dfrac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z+1-i)^n$

☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1-i)^n}z^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(1-i)^{n+1}}z^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}z^n$

Le rayon de convergence du développement obtenu est égal à

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ $-1+i$ ☐ $1-i$ ☐ $+\infty$.

8. Quel est le début de la valeur exacte de $\sin(1)$?

☐ $0,02$ ☐ $0,80$ ☐ $0,82$ ☐ $0,84$ ☐ $0,86$ ☐ $0,88$

9. Soit l'intégrale $\displaystyle\int_{C^+(0,R)} \frac{\cos(z)}{144+z^2}dz$, où $C^+(0,R)$ est le cercle, parcouru dans le sens trigonométrique, de centre 0 et de rayon $R = N+1$ où N est le dernier chiffre de la date de votre jour de naissance à préciser dans la case ☐. L'intégrale vaut :

☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{2\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{3\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{4\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$

☐ $\frac{5\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{6\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{7\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{8\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$ ☐ $\frac{9\pi}{12}(e^{12}+e^{-12})$

10. Combien vaut $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$?

☐ 0 ☐ $\dfrac{\pi}{4}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $-\pi i$ ☐ $+\infty$

Correction du DS de novembre 2025 "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $f_1(t) := t^8 \sin(t) e^{-|t|}$ est continue sur $\mathbb{R}$. L'intégrabilité s'étudie de la même manière en $\pm\infty$ (la fonction est impaire). Par croissances comparées, $|t^2 f_1(t)| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, d'où $|f_1(t)| \leq t^{-2}$ pour $t \geq A$ où A est assez grand, donc $f_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On peut faire le même raisonnement avec $f_1(t)^2 = t^{16}\sin^2(t)e^{-2|t|}$, donc on a aussi $f_1 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
$f_2(t) := \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^t - e^{-t}}}$ est positive et continue sur $]0,+\infty[$. À l'aide d'un DL, on voit que $f_2(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,1])\setminus\mathrm{L}^2(]0,1])$.
Par ailleurs, $f_2(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}e^{-t/2} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[) \cap \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$. Donc f_2 est dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ mais pas dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$.

$f_3(t) = \dfrac{e^{-t}}{t^2+e^{-t}}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$ donc on étudie l'intégrabilité en $\pm\infty$. On a $f_3(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} 1$ donc ni f_3, ni f_3^2 n'est intégrable en $-\infty$. On en déduit que f_2 n'est ni dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, ni dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ (même si on peut par ailleurs remarquer que comme $f_3(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-t}}{t^2}$, f_3 et f_3^2 sont intégrables en $+\infty$).
$f_4(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{t\sqrt{1-t}}$ est continue et positive sur $]0,1[$. On étudie l'intégrabilité en 0 et en 1. On a $f_4(t) \underset{t\to0^+}{\sim} 1 \in \mathrm{L}^1(]0,1/2])\cap\mathrm{L}^2(]0,1/2])$.
Mais $f_4(t) \underset{t\to1^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \in \mathrm{L}^1([1/2,1[) \setminus \mathrm{L}^2([1/2,1[)$. Donc f_4 est dans $\mathrm{L}^1(]0,1[)$ mais pas dans $\mathrm{L}^2(]0,1[)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) := \dfrac{x^n}{1+x^{n+3}}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus $|f_n(x)| \leq 1 \in \mathrm{L}^1([0,1])$ et $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{x^3} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$, donc l'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée est satisfaite. Comme $f_n(x) \to 0$ sur $[0,1]$ et $f_n(x) \to x^{-3}$ sur $[1,+\infty[$ quand $n \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+3}}dx = \int_0^1 0dx + \int_1^{+\infty} x^{-3}dx = \frac{1}{2}$.

3. La fonction F est une intégrale à paramètre $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$ avec $f(x,t) = \dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\cos(xt)$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral (exercice : les hypothèses sont satisfaites), on obtient :
$F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = -\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})\sin(xt)dt$ (1ère case à cocher).
La valeur de cette intégrale est la partie imaginaire de $-\displaystyle\int_0^{+\infty}(e^{-at}-e^{-bt})e^{ixt}dt = \frac{1}{b-ix} - \frac{1}{a-ix}$, soit finalement $F'(x) = \dfrac{x}{b^2+x^2} - \dfrac{x}{a^2+x^2}$ (2ème case à cocher).
En intégrant la valeur de $F'(x)$ obtenue ci-dessus, on trouve facilement $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) + C$ où C est une constante (3ème case à cocher).
C'était non demandé mais on peut calculer la constante C : en transformant l'intégrale définissant F à l'aide d'une intégration par parties, on démontre que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$. Comme par ailleurs, $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b^2+x^2}{a^2+x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit $C = 0$.

4. On reconnaît la transformée de Fourier de la gausienne e^{-x^2} évaluée en $\xi = -\dfrac{1}{2\pi}$. D'après le tableau, on trouve $\widehat{e^{-x^2}}(-(2\pi)^{-1}) = \sqrt{\pi}e^{-1/4}$.

5. D'après le cours, on sait que la transformée de Fourier d'une fonction dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ à valeurs réelles et paire est elle-même une fonction paire à valeurs réelles. De plus, la transformée de Fourier d'une fonction $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est continue et tend vers 0 en $\pm\infty$. Sur la 1ère ligne, il n'y a que la première fonction "cloche" qui convienne (la deuxième n'est pas paire et la troisième ne tend pas vers 0 en $\pm\infty$). Sur la 2ème ligne, il n'y a que la 2ème fonction qui convienne (la première est impaire et la troisième est discontinue). Au final, il y avait 2 cases à cocher.

6. Dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\widehat{\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2}}(\xi) = \left(\widehat{\frac{1}{1+x^2}}\right)^2(\xi) = (\pi e^{-2\pi|\xi|})^2 = \pi^2 e^{-4\pi|\xi|}$, en calculant $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}$ par inversion à l'aide du tableau.
Par inversion, il suit $(\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2})(-x) = \pi^2\widehat{e^{-4\pi|\xi|}}(x) = \frac{2\pi}{4+x^2}$ en utilisant encore le tableau. Finalement $(\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2})(x) = \frac{2\pi}{4+(-x)^2} = \frac{2\pi}{4+x^2}$.

7. De façon évidente, $f(z) = \dfrac{1}{1-i+z}$ est une fraction rationnelle avec un pôle d'ordre 1 en $z = -1+i$ donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-1+i\})$.
De plus $(z-(-1+i))f(z) = 1$ donc $\mathrm{Res}(f,-1+i) = 1$. Comme f est holomorphe en $z=0$, on peut l'y développer en série entière :
$f(z) = \dfrac{1}{1-i}\dfrac{1}{1+\frac{z}{1-i}} = \dfrac{1}{1-i}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^n}z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1-i)^{n+1}}z^n$. Le rayon de convergence de cette série entière est $R = \sqrt{2}$:c'est le rayon du plus grand disque ouvert centré en 0 inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-1+i\}$; on peut aussi le calculer avec le critère de d'Alembert.

8. On utilise la série entière de sinus, $\sin(1) = 1 - \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{120} - \dfrac{1}{720} + \cdots$. En calculant à la main, on obtient $1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 0,84166\cdots$.
Le terme suivant est de l'ordre de $0,001$ et ne modifiera pas la 2ème décimale. Donc $\sin(1) \approx 0,84$.

9. La fonction $g(z) = \dfrac{\cos(z)}{144+z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de ses 2 pôles $12i$ et $-12i$. Quel que soit le chiffre $N \in \{0,1,2,\ldots,9\}$, $1 \leq R \leq 10$ et donc f est holomorphe sur le disque $D(0,R)$. Par le théorème de Cauchy, l'intégrale est nulle.

10. Soit I l'intégrale et $R(z) = \dfrac{1}{(z^2-2z+2)^2} = \dfrac{1}{(z-(1+i))^2(z-(1-i))^2}$. C'est une fraction rationnelle de degré $-4 \leq -2$ ayant 2 pôles non réels. D'après le cours $I = 2\pi i \operatorname{Rés}(R, 1+i)$ (car $1+i$ est le seul pôle au-dessus de l'axe réel). Comme $a := 1+i$ est un pôle d'ordre 2, le résidu recherché sera le coefficient d'ordre 1 du développement en série entière au voisinage de a de $(z-a)^2R(z) = \dfrac{1}{(z-1+i)^2} = \dfrac{1}{(2i)^2}\dfrac{1}{(1+\frac{z-a}{2i})^2} = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{1+\frac{z-a}{2i}}\right)'$. Comme $\dfrac{1}{1+\frac{z-a}{2i}} = 1 - \dfrac{z-a}{2i} + \dfrac{(z-a)^2}{(2i)^2} + \cdots$, en dérivant cette série entière, on obtient : $(z-a)^2R(z) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{i}{4}(z-a) + \ldots$ D'où $\operatorname{Rés}(R, 1+i) = -i/4$ et donc $I = \pi/2$.