ne rien écrire

I :

II :

III :

IV :

NOM Prénom + code barre

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2018-2019
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Jeudi 17 janvier 2019 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits
Travaillez au brouillon avant de rédiger synthétiquement en n'utilisant que la place prévue.

Exercice 1. Soit f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1.1. ☐ f continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ☐ f continue en $(0,0)$ ☐ f continue nulle part.

1.2. Si elles existent, calculez

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ \boxed{} & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1.3. ☐ f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$ ☐ f n'est C^1 que sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ☐ f n'est C^1 nulle part

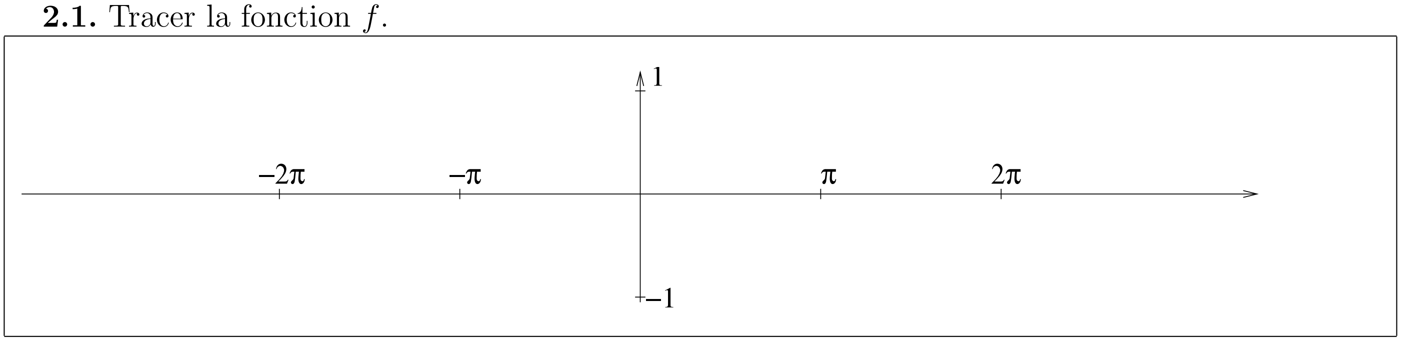
1.4. On pose $g(t) = f(\sin t, 3t+1)$. Calculez, si cela existe

$g(0) =$

$g'(0) =$

Exercice 2. Soit f la fonction 2π-périodique et paire telle que $f(t) = 1 - \dfrac{2t}{\pi}$ pour $t \in [0,\pi]$.

2.1. Tracer la fonction f.



2.2. Déterminer la série de Fourier de f qu'on notera $S(f)(t)$.

2.3. La fonction f est-elle égale à sa série de Fourier ? Justifiez.

2.4. Calculer les valeurs (*pas de calculs mais indiquer la méthode utilisée*)

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \boxed{}$$ Méthode :

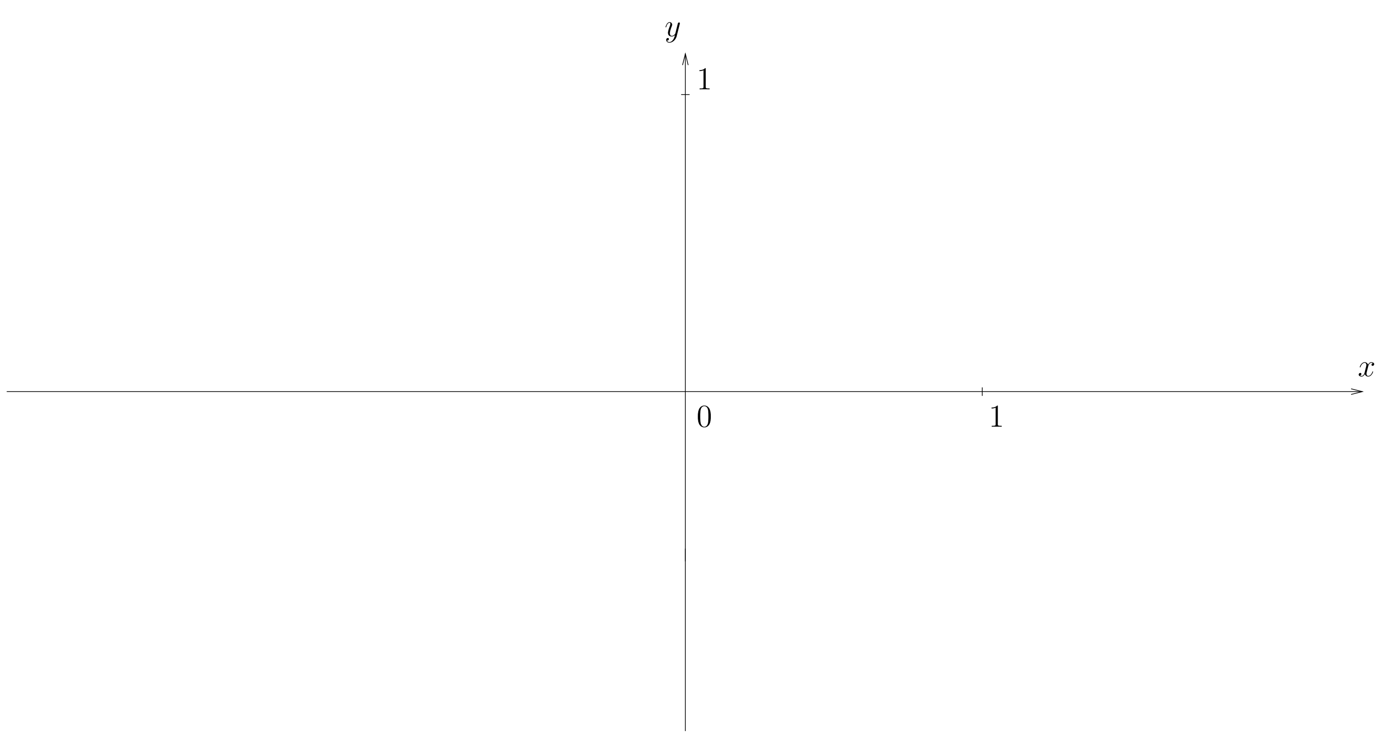
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \boxed{}$$ Méthode :

Exercice 3. Soit $h(x,y) = e^{x+y} + y - 1$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Démontrer qu'il existe une fonction φ définie au voisinage de 0 telle que, au voisinage de $(0,0)$, $(x,y) \in \Gamma \Leftrightarrow y = \varphi(x)$. *Soyez précis dans la vérification des hypothèses du théorème utilisé.*

Déterminer le développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 4. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x+y$ et $g(x, y) = x^2+4y^2-1$.

4.1. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f et g sur le même dessin.



4.2. Calculer : $\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \boxed{}$ $\quad \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \boxed{}$

$\inf\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \boxed{}$ $\quad \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} g(x,y) = \boxed{}$

On considère les problèmes

(I) Minimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

(S) Maximiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

4.3. Représenter graphiquement les solutions de **(I)** et **(S)** sur le dessin de la question 3.1.

4.4. Calculer les solutions de **(I)** et **(S)** à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y)+\lambda g(x,y)$.

FIN