ne rien écrire
Exo1 :
Exo2 :
Exo3 :
Exo4 :

NOM Prénom + code barre

CORRECTION

Année universitaire 2024-2025
2ème année STPI

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3
Mardi 5 novembre 2024 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici. CV signifie convergence et DV signifie divergence.
Cocher une case à tort sera pénalisé mais pas de pénalisation pour une valeur numérique fausse.

1.1. $\sum \frac{1}{(-1)^{n+1}\ln(n)}$ ☒ CV ☐ DV (théorème spécial des séries alternées)

1.2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x}{\sin(x)+x^3}dx$ ☒ CV ☐ DV $\left(\frac{\sqrt{x}+x}{\sin(x)+x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

1.3. $\sum \frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$ ☒ CV ☐ DV $\left(\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)$

1.4. Valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\sum \frac{n}{1+n^{2a}}$ CV : $a > 1$

1.5. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^\alpha}$ CV : $1 < \alpha < 2$

1.6. $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}$ ☒ CV ☐ DV. En cas de CV : $S = -1$
(télescopique)

1.7. Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont le même rayon de convergence R, alors $\sum(a_n+b_n)x^n$ a aussi un rayon de convergence égal à R. ☐ Vrai ☒ Faux

1.8. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^{n+1}}$. Rayon de convergence $R = 3$

Valeur de la somme $f(x) = \frac{1}{3+x}$

1.9. Développement en série entière en $x=0$ de $g(x) = \frac{x}{3x+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{2^n} x^n$

Rayon de CV du développement en série entière $R = \frac{2}{3}$

1.10. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2(e^2-1)$

Exercice 2. Démontrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t+t^3}$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t+t^3}$ est continue sur $[1,+\infty[$ donc on n'a de problème de convergence qu'en $+\infty$.

Mais $\forall t \geq 1$, $\frac{1}{t+t^3} \geq 0$ et $\frac{1}{t+t^3} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^3}$ avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ convergente (par Riemann avec $\alpha = 3 > 1$) donc $\underline{I \text{ converge}}$ (théorème des équivalents)

Calculer la valeur de I.

$$\forall A \geq 1, \int_1^A \frac{dt}{t+t^3} = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^A$$

$$= \ln A - \frac{1}{2}\ln(1+A^2) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \ln A - \frac{1}{2}\ln\left(A^2\left(\frac{1}{A^2}+1\right)\right) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \ln A - \frac{1}{2}\ln A^2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) + \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln 2$$

Donc $\underline{I = \frac{1}{2}\ln 2}$. Remarque : cela prouve également directement la convergence de I.

Exercice 3. Le but est de démontrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$.

Soit $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ pour $n \geq 1$. Prouver que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = (n+\frac{1}{2})\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

$$\forall n \geq 1, \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-n-1}\sqrt{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right)$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

En utilisant un développement limité à l'ordre 3 de l'expression précédente, démontrer que $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1$$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{12n^2}$ converge et que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq 0$ pour n grand, on obtient que $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge par le théorème des équivalents.

En déduire que la suite (u_n) converge puis conclure.

$\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ est une série télescopique convergente. Appelons S sa somme. On a, pour $n \geq 2$,
$\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \ln u_n - \ln u_1 = \ln u_n + 1$ (car $u_1 = \frac{1}{e}$).
Il suit que $\lim_{n\to+\infty} \ln u_n = S-1$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{S-1}$.
Comme $e^{S-1} \neq 0$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{S-1}$ soit $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{1-S} n^n e^{-n} \sqrt{n}$,

d'où la conclusion avec $C = e^{1-S} > 0$.

Exercice 4. Déterminer la solution de l'équation différentielle :

$$y''(x) + 3xy'(x) + 3y(x) = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$$

Chercher $y(x)$ sous la forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Démontrer que $a_n = 0$ pour n impair et établir une relation de récurrence pour $b_p = a_{2p}$ afin de déterminer a_n pour n pair. Calculer le rayon de convergence de la série entière obtenue et exprimer la somme à l'aide des fonctions usuelles.

Posons $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec un rayon de convergence $R \geq 0$.
$\forall x \in]-R,R[$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)n a_n x^{n-2}$.
D'où
$$\begin{aligned} y''+3xy'+3y &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^n \\ &= (2a_2+3a_0) + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\left((n+2)a_{n+2} + 3a_n\right)x^n \end{aligned}$$
Donc $y''+3xy'+3y=0$ entraîne $\begin{cases} 2a_2+3a_0 = 0 \\ \forall n \geq 1,\ (n+2)a_{n+2} + 3a_n = 0 \end{cases}$

- les conditions initiales donnent $\begin{cases} y(0)=2 \Rightarrow a_0 = 2 \\ y'(0)=0 \Rightarrow a_1 = 0 \end{cases}$
- Comme $a_1=0$ et $a_{n+2} = -\frac{3}{n+2} a_n$, une récurrence immédiate entraine $\underline{a_n = 0 \text{ pour tout } n \text{ impair}}$.
- Si n est pair, $n=2p$, on a : $a_{2p+2} = a_{2(p+1)} = -\frac{3}{2p+2} a_{2p} = -\frac{3}{2(p+1)} a_{2p}$

  Soit encore $b_{p+1} = -\frac{3}{2(p+1)} b_p$ si $b_p = a_{2p}$.

  Cette formule de récurrence donne $b_p = \frac{(-\frac{3}{2})^p}{p!} b_0 = 2\frac{(-\frac{3}{2})^p}{p!}$

  car $b_0 = a_0 = 2$.
- Finalement on trouve $y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} b_p x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} 2\frac{(-\frac{3}{2})^p}{p!} x^{2p}$

$$= 2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(-\frac{3x^2}{2}\right)^p = 2e^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

$R = +\infty$

L'unique solution de l'équation différentielle est : $\underline{y(x) = 2e^{-\frac{3}{2}x^2}}$.