Année universitaire 2015-2016
4ème année GM

Devoir surveillé d'EDP

Jeudi 7 janvier 2015 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques et documents interdits *****
Les 3 exercices sont indépendants.
Partage du temps conseillé: Exercice 1: 50'–60', Exercice 2: 20'–30', Exercice 3: 40'–50'.

Exercice 1. On s'intéresse dans cet exercice à la résolution numérique d'un problème de diffusion avec des conditions au bord mixtes. On considère le problème suivant

$$\begin{cases} -u^{''}(x) = f(x), \quad x \in]0,1[, \\ u^{'}(0) = 0, \ u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $h = \dfrac{1}{n}$ et $x_i = (i-1)h, 1 \leq i \leq n+1$, une subdivision uniforme de $[0,1]$.

1.1. Dans la première partie de cet exercice, on suppose que $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ ce qui assure l'existence d'une unique solution classique $u \in C^4([0,1],\mathbb{R})$ de (1). On cherche à construire et à étudier une solution approchée : $v = (v_i)_{1\leq i\leq n}$, $v_i \simeq u(x_i)$, avec la méthode de différence finie. On notera aussi par $v_{n+1} = u(x_{n+1}) = 0$ ce qui assure que la condition au bord droit est satisfaite.

1.1.1. En utilisant la formule de différence finie centrée pour approcher $u^{''}(x_i)$, pour $2 \leq i \leq n$, trouver un système de $n-1$ equations à n inconnues que vérifient les $(v_i)_{1\leq i\leq n}$.

1.1.2. À l'aide d'un développement de Taylor de u au voisinage de 0, trouver une approximation de $u^{''}(0)$ en fonction de $u(x_2)$, $u(0)$ et h et montrer qu'elle est d'ordre 1 par rapport à h.

1.1.3. Par continuité, on a $-u^{''}(0) = f(0)$. Déduire de 1.1.2 une équation supplémentaire reliant v_1 et v_2 qu'on écrira sous la forme $\frac{1}{h^2}(v_1 - v_2) = \alpha$ où α est à déterminer. Écrire le système linéaire que vérifie $v = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ sous la forme $\frac{1}{h^2}Av = F$, où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est une matrice *symétrique* et $F \in \mathbb{R}^n$ un vecteur à déterminer.

1.1.4. Montrer que la matrice symétrique A est définie positive et en déduire qu'elle est inversible.

1.1.5. Donner l'erreur de consistance de ce schéma en x_i : $R(x_i, h, u)$, pour tout $1 \leq i \leq n$, et montrer que le schéma est consistant d'ordre 1 en h.

1.2. On suppose dans cette partie que $f \in L^2(]0,1[)$. On notera par H l'espace de Hilbert suivant : $H = \{u \in H^1(]0,1[) : u(1) = 0\}$.

1.2.1. Soit $v \in H$. En écrivant $v(x) = \displaystyle\int_1^x v'(t)dt$, montrer que

$$\|v\|^2_{L^2(]0,1[)} \leq C\|v^{'}\|^2_{L^2(]0,1[)}$$

avec C une constante strictement positive indépendante de v à préciser.

1.2.2. Trouver une formulation faible de (1) dans H sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H \\ a(u,v) = l(v),\ \forall v \in H \end{array} \right. \tag{2}$$

avec $a : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ et $l : H \mapsto \mathbb{R}$ à déterminer et montrer qu'elle admet une unique solution faible en précisant le théorème utilisé et en vérifiant toutes ses hypothèses.

1.2.3. Soit $V_n = \{v \in C([0,1]) :\ v_{|[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1[X],\ \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } v(1) = 0\}$ où $\mathbb{R}_1[X]$ désigne l'ensemble de polynômes de degré ≤ 1. On admet que $V_n \subset H$ et $V_n = \text{vect}\{\Phi_1, \cdots, \Phi_n\}$, avec, pour tout $1 \leq i \leq n$, $\Phi_i \in C([0,1])$, ${\Phi_i}_{|[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{R}_1[X]$, $\forall 1 \leq j \leq n$, et $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\forall 1 \leq j \leq n+1$, ($\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker). Représenter sur un schéma les courbes de $(\Phi_i)_{1\leq i\leq n}$ et donner leurs expressions exactes.

1.2.4. Soit $u_n \in V_n$, une approximation de la solution faible u de (2) par la méthode d'éléments finis de degré 1 (ou 'P1' conforme) en suivant l'algorithme de Ritz-Galerkin. Écrire la formulation faible que vérifie u_n et en posant $u_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \Phi_j(x)$, trouver la matrice du système linéaire vérifié par $(u_j)_{1\leq j\leq n}$.

Exercice 2. On considère un tube horizontal de longueur L dans lequel circule de la gauche vers la droite un fluide caloporteur. On suppose que la température $u(x,t)$ ne dépend que de l'abscisse $0 \leq x \leq L$ et du temps t et qu'elle est régie par l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial (v(x)u(x,t))}{\partial x} = 0, \qquad 0 < x < L,\ 0 < t < T, \tag{3}$$

$$u(0,t) = \theta(t), \qquad 0 < t < T, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L. \tag{5}$$

La vitesse du fluide $v(x) = \gamma(1+x)$, $\gamma > 0$, la condition d'entrée à gauche dans le tube $\theta(t)$ et la condition initiale $u_0(x)$ sont des fonctions données.

2.1. Trouver l'expression de la caractéristique $x(t) = x_{t_0,x_0}(t)$ passant par le point (t_0, x_0) pour $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x_0 \leq L$ et représenter les caractéristiques sur un dessin.

2.2. Trouver l'EDO qui régit la variation de u le long de la caractéristique $x_{t_0,x_0}(t)$. *[On dérivera par rapport au temps la quantité $u(x_{t_0,x_0}(t), t)$.]*

2.3. Résoudre l'EDP (3)-(4)-(5).
[On donnera la solution dans chacune des zones séparées par la caractéristique critique.]

Exercice 3. On considère une barre de métal de longueur L parfaitement isolée latéralement (cf. figure 1). La température $u(x,t)$ dans la barre ne dépend que de l'abscisse x et est régie par le système suivant :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t}(x,t) - \lambda \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t) = 0, \qquad 0 \le x \le L,\ t > 0, && (6)\\
&U(0,t) = 0, \qquad t > 0, && (7)\\
&U(L,t) = 0, \qquad t > 0, && (8)\\
&U(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le L, && (9)
\end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ est une constante et $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}$ est définie par $u_0(x) = 2\theta_0 \frac{x}{L}$ pour $0 \le x \le \frac{L}{2}$ et $u_0(x) = 2\theta_0(1 - \frac{x}{L})$ pour $\frac{L}{2} \le x \le L$.

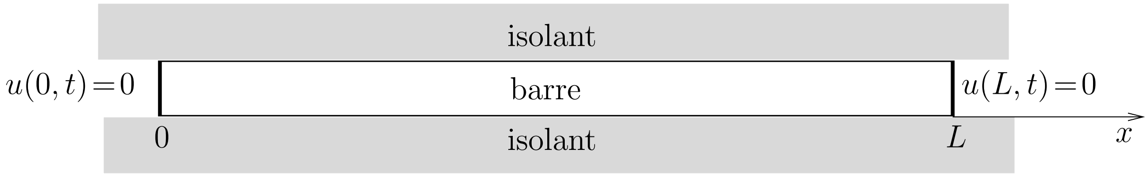

Figure 1 : la barre de métal

3.1. Quel est le nom et l'unité physique de la constante λ qui apparaît dans l'équation (6) ? Expliquer à quoi correspondent physiquement les conditions au bord (7)-(8). Décrire qualitativement (sans résoudre l'équation) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant mathématiquement le système.

3.2. On cherche une solution de (6) sous la forme $U(x,t) = \phi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par ϕ et ψ et donner leurs solutions générales.

3.3. Démontrer que si l'on cherche ϕ et ψ de manière à satisfaire de plus les conditions au bord (7)-(8), on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $U_k(x,t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ avec $k = 1, 2, \ldots$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

3.4. Déterminer des constantes γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, de sorte que l'on puisse écrire

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \qquad \text{pour tout } x \in [0,L].$$

[On pourra prolonger u_0 par imparité sur $[-L,0]$ puis par $2L$-périodicité sur $\mathbb{R}$ et on développera en série de Fourier le prolongement obtenu.]

3.5. En exploitant la condition initiale (9) et en utilisant la question précédente, trouver une solution $U(x,t)$ du système (6)-(7)-(8)-(9) sous la forme $U(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} U_k(x,t)$.

3.6. Quelle est la limite de $U(x,t)$ quand $t \to +\infty$? Comparer avec 3.1.