Université de Tours–UE “Récréations mathématiques”–année 2007/08

Examen final

Jeudi 24 avril 2008 – durée 2h

**** Tous documents et appareils électroniques interdits ****

Une réponse sans justification ne rapportera aucun point. Le raisonnement et une rédaction claire et concise seront essentiels dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 Questions brèves :

1. Complétez de manière logique la suite suivante : 3 15 11 55 51 ... ...

2. Albert ne préfère pas ne pas s'opposer à des idées contraires à celles de Bernard. Bernard sera-t-il plutôt satisfait ou mécontent de l'attitude d'Albert ?

3. Lors d'un vote, 75 % des inscrits ont voté à 60 % pour Mme Dupond. Quel est le pourcentage des inscrits qui ont voté pour Mme Dupond ?

Exercice 2 Mrs McGinty a été assassinée dans son manoir. On a arrêté trois suspects, Mr Black, Mr Grey et Mr Purple. Parmi eux se trouvent le coupable qui ment pour se protéger et deux innocents ; l'un des deux dit la vérité et l'autre ne sait rien, il peut soit mentir soit dire vrai. Voici un extrait de l'interrogatoire de deux des témoins :

Mr Black : “Mr Grey est innocent.”
Mr Purple : “Mr Black n'est pas coupable.”

Le détective Hercule Poirot assure que ces déclarations sont suffisantes pour trouver le coupable. Qui est-ce ?

Exercice 3 Inscrivez un nombre entier compris entre 0 et 100 sur votre copie sachant que vous aurez d'autant plus de points à cet exercice que ce nombre sera proche de *la moitié de la moyenne* de tous les nombres inscrits par les personnes qui passent cet examen aujourd'hui. Justifiez votre choix en quelques phrases.

Exercice 4 Retrouvez les chiffres masqués par les astérisques :

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & * & * & 5 \\
\times & & & 1 & * & 7 \\
\hline
 & & 2 & * & * & 5 \\
 & 1 & 3 & 0 & 0 & \\
+ & * & * & * & & \\
\hline
 & 4 & * & 7 & 7 & *
\end{array}
$$

Tournez la page SVP

Exercice 5 On dispose des pavés de trois cases de type L (Voir Figure 1).

1. On considère un échiquier 2×2 privé d'une case quelconque et on observe que l'on peut toujours couvrir avec un pavé de type L. Peut-on de même couvrir un échiquier 4×4 (toujours privé d'une case quelconque) avec des pavés de type L ?

2. Même question sur un échiquier 8×8 (privé d'une case quelconque).

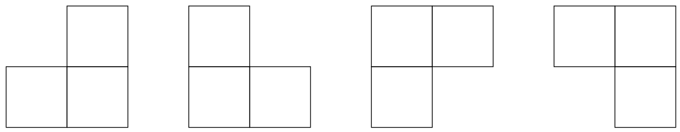

Figure 1: *Pavés de type L*

Exercice 6 Vous avez un immeuble de 100 étages et on vous donne 2 balles absolument identiques. Le but est de déterminer leur résistance, c'est-à-dire de trouver l'étage à partir duquel elles se briseront lorsque vous les lâcherez par une fenêtre de cet étage. Vous pouvez faire le nombre de tests que vous voulez et vous avez le droit de briser les balles. Celles-ci peuvent se briser à partir du 1er étage ou au contraire résister même à une chute du 100ème étage.

Quel est le nombre minimum de tests à réaliser pour trouver l'étage critique ?

Si l'on se permet 100 tests, on détermine l'étage critique à coup sûr. Le plus important dans cet exercice est de proposer une démarche qui permette de diminuer ce nombre, même si vous n'aboutissez pas au nombre de tests minimal.

Barême indicatif :
Exercice 1 : 3 pts *Exercice 2 : 3 pts* *Exercice 3 : 3 pts* *Exercice 4 : 3 pts*
Exercice 5 : 4 pts *Exercice 6 : 4 pts*

EXAMEN FINAL du jeudi 24 avril 2008 : CORRECTION

Une solution de l'exercice 1.
1. On a : 3 15 11 55 51 255 251. On remarque qu'on alterne les opérations "$\times 5$" et "-4."
On a : 1 6 24 29 116 121 484. On remarque qu'on alterne les opérations "$+5$" et "$\times 4$."
2. *Albert ne préfère pas ne pas s'opposer à des idées contraires à celles de Bernard.* En supprimant la double négation du début de la phrase, on ne change pas fondamentalement le sens de la phrase. On obtient : "Albert préfère s'opposer à des idées contraires à celles de Bernard." Ainsi Albert critique les idées contraire à celles de Bernard donc, même si on ne peut pas affirmer qu'il promeut celles de Bernard, ce dernier devrait être quand même être plutôt satisfait de l'attitude d'Albert.
Auguste ne considère pas que des idées contraires à celles de Barnabé ne sont pas dignes d'intérêt. En supprimant la double négation, qui ne change pas fondamentalement le sens de la phrase, on obtient : "Auguste considère que des idées contraires à celles de Barnabé sont dignes d'intérêt." Ainsi Auguste manifeste-t-il de l'intérêt pour des idées qui ne sont pas celles de Barnabé. Ce dernier risque d'être mécontent de l'attitude d'Auguste.
3. Au total, 60 % de 75 % ont voté pour Mme Dupond, c'est-à-dire $60/100 \times 75/100 = 0,45 = 45\%$. Donc 45% des inscrits ont voté pour Mme Dupond.
Dans le cas où 70 % de 65 % ont voté pour Mme Dupond, c'est $70/100 \times 65/100 = 0,455 = 45,5\%$ des inscrits qui ont voté pour Mme Dupond.

Une solution de l'exercice 2. Notons B pour Mr Black (ou Mr Blue selon le sujet), C pour Mr Grey (ou Mr Purple) et D pour Mr Purple (ou Mr Yellow).
Parmi eux, on a un *coupable*, un innocent qui dit vrai (appelons-le *innocent* tout simplement) et un innocent qui ne sait rien (appelons-le *ignorant*). Une possibilité est de tester les possibilités pour C par exemple :
Cas 1.— C est innocent. Dans ce cas, B dit vrai, il est donc soit innocent, soit ignorant. Comme c'est C l'innocent, B est alors ignorant. Il ne reste plus qu'un possibilité pour D qui est coupable ; en particulier D ment quand il dit que B n'est pas coupable donc B devrait être coupable ce qui est absurde. Le cas 1 n'est pas possible.
Cas 2.— C est ignorant. Dans ce cas aussi B dit vrai et donc il est nécessairement innocent. D serait alors coupable et mentirait ce qui n'est pas possible car il dit que B est innocent. Donc le cas 2 est impossible.
Cas 3.— C est coupable. C'est le seul cas possible d'après ce qui précède. Vérifions que tout est cohérent. Si C est coupable, B ment donc il est soit coupable, soit ignorant ; B est donc ignorant. Ainsi D est innocent et il dit effectivement vrai quand il affirme que B n'est pas coupable.
Conclusion. B est ignorant, C est coupable et D est innocent.

Une solution de l'exercice 3. Bien sûr, on demandait ici un raisonnement cohérent qui donne une solution qui devrait être proche de celle observée après correction des copies.
Appelons S la moitiée de la moyenne (la solution) et M la moyenne. On peut déjà remarquer que S ne peut pas être supérieure à 50 (S= 50 si tout le monde met 100). Imaginons que les nombres, entre 0 et 100, soient inscrits aléatoirement sur les copies. Dans ce cas, M vaudrait environ 50 et S vaudrait 25. Si tous font ce raisonnement et mettent 25, S serait égale à $25/2 \approx 12$. En réitérant ce raisonnement S devrait alors être égale à environ 6, puis 3 puis 3/2, etc. Finalement, on se convainc que si chacun inscrivait le nombre le plus logique, celui-ci devrait être S=0. En réalité, tout le monde ne mettra sans doute pas 0 et donc S ne pourra pas être 0 mais sera sans doute un nombre petit. À Voir...

Solution de l'exercice 4. On trouve :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 5 \\
\times & & & 1 & \mathbf{4} & 7 \\
\hline
 & & 2 & \mathbf{2} & \mathbf{7} & 5 \\
 & 1 & 3 & 0 & 0 & \\
+ & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{5} & & \\
\hline
 & 4 & \mathbf{7} & 7 & 7 & \mathbf{5}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathbf{4} & 1 & \mathbf{5} \\
\times & & & & 3 & \mathbf{8} & 2 \\
\hline
 & & & & \mathbf{8} & 3 & \mathbf{0} \\
 & & 3 & \mathbf{3} & 2 & \mathbf{0} & \\
+ & \mathbf{1} & 2 & \mathbf{4} & 5 & & \\
\hline
 & 1 & \mathbf{5} & 8 & \mathbf{5} & 3 & 0
\end{array}$$

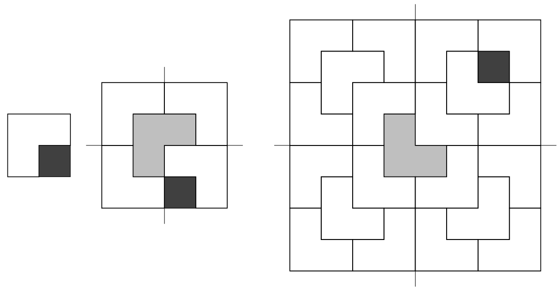

Figure 2: *Exemple de pavages d'échiquiers 2×2, 4×4 et 8×8 privés d'une case (la noire) par des pavés de type L*

Solution de l'exercice 5.
1. Cas d'un échiquier 2×2. Le pavage d'un échiquier 2×2 auquel on a enlevé une case par des pavés de type L est évident : il reste exactement un L à placer (cf. Figure 2).
2. Cas d'un échiquier 4×4. On traite le cas d'un échiquier 4×4 (privé d'une case) en se ramenant au cas précédent : pour cela on subdivise l'échiquier 4×4 en 4 échiquiers 2×2 (pour une illustration de la solution, voir la Figure 2). Parmi ces 4 sous-échiquiers, 1 exactement est privé d'une case et on sait le paver (cf. Cas 1). Maintenant, en plaçant de façon astucieuse un L de sorte qu'il recouvre simultanément un bout de chacun des 3 sous-échiquiers restants (cf. le L grisé sur la Figure 2), il nous reste à paver 3 échiquiers 2×2 auxquels il manque à chacun une case (la case occupée par un bout du L qu'on vient de placer). D'après le Cas 1, on sait compléter le pavage.
2. Cas d'un échiquier 8×8. On procède de même que ci-dessus en se ramenant au cas précédent en subdivisant l'échiquier 8×8 en 4 échiquiers 4×4. On sait paver celui qui est privé d'une case et, pour les 3 autres, on commence par placer un L de façon à ce qu'ils soient également privés d'une case (cf. le L grisé sur la Figure 2). On termine en appliquant ce qu'on a décrit dans le Cas 2 (cf. Figure 2).
Remarque : en procédant ainsi de proche en proche (en fait, on appelle ceci un raisonnement par récurrence), on sait comment paver n'importe quel échiquier de taille $2^n \times 2^n$ privé d'une case (n est un entier).

Solution de l'exercice 6.
1. La solution "naïve." On teste tous les étages 1 à 1 en allant du premier au dernier. Lorsque la boule se casse, on sait qu'on a atteint l'étage critique. Avec cette méthode, au pire on a besoin de 100 essais (il faudra éventuellement tester le 100ème pour savoir si la boule résiste à cette hauteur ou pas).
2. Une première solution "fractionnée." Dans le cas 1, on n'a utilisé qu'une seule des deux boules. On peut se dire qu'on a le droit d'en casser une pour diminuer le nombre de tests. On fractionne les étages en deux parties égales et on commence par lancer une boule du 50ème étage. On a deux possibilités : soit elle se casse et on sait que l'étage critique est compris entre 1 et 50 ; soit elle ne se casse pas et alors l'étage critique est compris entre 51 et 100. Dans le premier cas on teste les étages restants de 1 à 49 avec la deuxième boule. On a 49 tests à réaliser dans le pire cas, soit 50 tests effectués en tout. Dans le deuxième cas, on teste du 51ème au 100ème, soit 50 tests à réaliser au pire pour terminer avec 51 tests. En conclusion, en fractionnant en 2 parties égales, on se retrouve avec 51 tests à réaliser (presque deux fois moins que la solution naïve !).
2. La meilleure solution "fractionnée" en parts égales. On peut se demander si on ne peut pas améliorer le fractionnement (au lieu de diviser en 2 parts égales, on divise en 4 parts égales par exemple). En cherchant, on trouve que le mieux est de fractionner les étages en 10 parts égales (cette recherche peut s'effectuer soit "à la main" soit en remarquant qu'il s'agit de trouver le minimum de la fonction $100/n + n - 1$ ou n est le nombre de fractionnement). On teste avec la première boule successivement les étages $10, 20, 30, \cdots 80, 90$. Si la boule se casse au 60ème par exemple, on teste alors les étages $51, 52, \cdots 58, 59$ avec la deuxième boule. Quel est le nombre de tests à effectuer dans le pire cas ? C'est la situation où l'on a du tester de 10 en 10 jusqu'au 90ème puis le 91ème jusqu'au 100ème ce qui fait 19 tests en tout.
3. Une solution encore meilleure ! La démarche précédente, bien que très satisfaisante, peut être améliorée en fractionnant l'immeuble en part non égales : on teste d'abord l'étage 14, puis éventuellement le 27 (+13), puis le 39 (+12), le 50 (+11), le 60 (+10), le 69 (+9), le 77 (+8), le 84 (+7), le 90 (+6), le 95 (+4), le 99 (+3) en enfin le 100. Dans ce cas (je vous laisse compter), on effectuera au plus 14 tests. Cela semble être la meilleure solution.