Examen

“Homogénéisation et problèmes de propagation de fronts”

(M. Briane & O. Ley)

Vendredi 11 mars 2011 – durée : 3h

– *Les deux parties sont indépendantes, les faire sur des copies séparées.*
– *On vous demande d'équilibrer le temps consacré à chaque partie.*
– *Les documents manuscrits et ceux distribués en cours sont permis.*
– *Tous documents imprimés et appareils électroniques interdits.*
– *Sauf mention du contraire, vous pouvez utiliser les résultats du cours sans démonstration.*
– *Le sujet comporte 3 pages.*

Partie I

Dans tout le problème, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $\alpha, \beta > 0$. On considère une suite A_ε de $\mathcal{M}(\alpha, \beta; \Omega)$ qui H-converge vers A_*, et P_ε un correcteur associé à A_ε.

Les questions 1-4 sont largement indépendantes.

1. *a*) Soit $B \in \mathbb{R}_a^{d\times d}$ une matrice antisymétrique constante. Montrer que pour tout $v \in H^1(\Omega)$, $\operatorname{div}(B\nabla v) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Montrer que la suite $B_\varepsilon := A_\varepsilon + B$ appartient à un ensemble $\mathcal{M}(\alpha, \beta'; \Omega)$ avec $\beta' > 0$ (on ne cherchera pas à calculer précisément β') et H-converge vers $A_* + B$. On pourra considérer un correcteur associé à A_ε.

c) Le résultat subsiste-t-il lorsque $B = I_d$? Justifier votre réponse à l'aide d'un exemple simple.

2. On suppose que A_ε est symétrique et que A_ε, A_ε^{-1} convergent respectivement vers $\bar{A}$, $\underline{A}^{-1}$ dans $L^\infty(\Omega)^{d\times d}$ faible $*$, i.e.

$$\forall\, \Phi \in L^1(\Omega)^{d\times d}, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega A_\varepsilon : \Phi\, dx = \int_\Omega \bar{A} : \Phi\, dx \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega A_\varepsilon^{-1} : \Phi\, dx = \int_\Omega \underline{A}^{-1} : \Phi\, dx.$$

a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Passer à la limite dans l'intégrale suivante en justifiant les convergences,

$$\int_\Omega A_\varepsilon\,(P_\varepsilon\lambda - \lambda)\cdot(P_\varepsilon\lambda - \lambda)\,\varphi\, dx \geq 0.$$

En déduire que $A_* \leq \bar{A}$ p.p. (presque partout) dans Ω.

b) En partant de l'inégalité

$$\int_\Omega A_\varepsilon^{-1}\,(A_\varepsilon P_\varepsilon\lambda - \lambda)\cdot(A_\varepsilon P_\varepsilon\lambda - \lambda)\,\varphi\, dx \geq 0,$$

montrer de même que $A_* \geq \underline{A}$ p.p. dans Ω.

3. On suppose que $d = 2$ et qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\det(A_\varepsilon) = \delta$ p.p. dans Ω. Montrer que $\det(A_*) = \delta$ p.p. dans Ω.

4. On suppose que $d = 2$. Soit $a : y \longmapsto a_1(y_1)\, a_2(y_2)$ la fonction Y-périodique, définie sur la période $Y := [0,1]^2$ par l'échiquier à quatre phases de même fraction volumique :

$$a = \begin{array}{|c|c|} \hline \beta & \alpha\beta \\ \hline 1 & \alpha \\ \hline \end{array}$$

a) Pour $i = 1, 2$, déterminer une fonction $w_i(y) = w_i(y_i)$ 1-périodique, continue sur $\mathbb{R}$, affine par morceaux sur $[0,1]$, telle que $w_i(0) = 0$, $w_i(1) = 1$ et $\operatorname{div}(a \nabla w_i) = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

b) En déduire que la matrice homogénéisée A_* associée à la suite $A_\varepsilon(x) := a(\frac{x}{\varepsilon})\, I_2$, est égale à

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\,(\beta+1)}{\alpha+1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta\,(\alpha+1)}{\beta+1} \end{pmatrix}.$$

Quel résultat retrouve-t-on lorsque $\beta = 1$?

c) Calculer le déterminant du correcteur associé à A_ε et retrouver dans ce cas particulier un résultat général que l'on rappellera.

Partie II

Les questions 1-4 sont indépendantes.

1. Le but de cette question est de démontrer le résultat de stabilité suivant :

On suppose que, pour $\varepsilon > 0$, u_ε est une sous-solution de viscosité continue de l'équation parabolique dégénérée

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + F_\varepsilon(x, t, Du_\varepsilon, D^2 u_\varepsilon) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

où u_0 est continu sur $\mathbb{R}^N$ et F_ε est continue sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ ($\mathcal{S}_N$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille N). On suppose de plus que, lorsque $\varepsilon \to 0$, F_ε converge localement uniformément vers une fonction F sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}_N$ et u_ε converge localement uniformément vers une fonction u sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ (on rappelle que la convergence locale uniforme est la convergence sur tout compact du domaine de définition de la fonction). Alors u est une sous-solution de viscosité continue de (1) (avec F_ε remplacé par F).

a) Démontrer que si une suite (v_ε) de fonctions continues sur $\mathbb{R}^N \times [0, +\infty[$ converge localement uniformément vers une fonction v et que v admet un maximum local *strict* $(\overline{x}, \overline{t}) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$, alors il existe une suite $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ de maxima locaux de v_ε telle que $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \to (\overline{x}, \overline{t})$ (on rappelle qu'un maximum local $(\overline{x}, \overline{t})$ est strict s'il existe une petite boule $B((\overline{x}, \overline{t}), \overline{r}) \subset \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$ telle que $v(x,t) < v(\overline{x}, \overline{t})$ sur $B(\overline{x}, \overline{r}) \setminus \{(\overline{x}, \overline{t})\}$).

b) Démontrer que si, pour une fonction $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[)$, $u - \varphi$ admet un maximum local $(\overline{x}, \overline{t})$, alors $u - \psi$ admet un maximum local *strict* en $(\overline{x}, \overline{t})$, où

$$\psi(x,t) = \varphi(x,t) + |x - \overline{x}|^4 + |t - \overline{t}|^2,$$

c) Démontrer le résultat de stabilité.

2. Si Ω_0 est ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de bord $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$, on appelle $(\Gamma_t, \Omega_t)_{t\geq 0}$ l'evolution généralisée par courbure moyenne du front initial Γ_0 obtenue par l'approche par ligne de niveaux (on a $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, pour tout $t \geq 0$).

Démontrer le principe d'inclusion suivant :
Supposons que $(\Gamma_t^1, \Omega_t^1)_{t\geq 0}$ et $(\Gamma_t^2, \Omega_t^2)_{t\geq 0}$ soient les évolutions généralisées de deux fronts initiaux compacts Γ_0^1 et Γ_0^2. Alors

$$\Omega_0^1 \subset \Omega_0^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega_t^1 \subset \Omega_t^2 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

[INDICATIONS : on pourra démontrer que les fonctions distances signées $d^s(x, \Gamma_0^i)$ (positives dans Ω_0^i), $i = 1, 2$, sont telles que $d^s(x, \Gamma_0^1) \leq d^s(x, \Gamma_0^2)$, et s'en servir pour construire des données initiales permettant d'appliquer le théorème de comparaison.]

3. Soit Γ_0 un front initial compact (qui est le bord d'un ouvert $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^N$). Démontrer qu'il existe un temps d'extinction $t^* > 0$ tel que $\Gamma_t = \emptyset$ pour $t > t^*$. Donner un majorant de t^* en fonction du rayon de la plus petite boule contenant Γ_0 et un minorant de t^* en fonction du rayon de la plus grande boule contenue dans Ω_0.

4. Soit $\mathbb{T}_0$ le tore de paramètres $a > 0$ et $b > 0$; b est la rayon du "tube", a le rayon du grand cercle et $\mathbb{T}_0$ la surface du tore plein d'intérieur Ω_0 (voir Figure 1). Décrire qualitativement l'évolution généralisée par courbure moyenne du tore dans les deux cas suivants :
– lorsque a est grand devant b ;
– lorsque $a - b$ est petit devant b.

[On ne demande pas de faire de calculs mais d'expliquer qualitativement ce qu'il se passe en apportant quelques éléments de justification pertinents.]

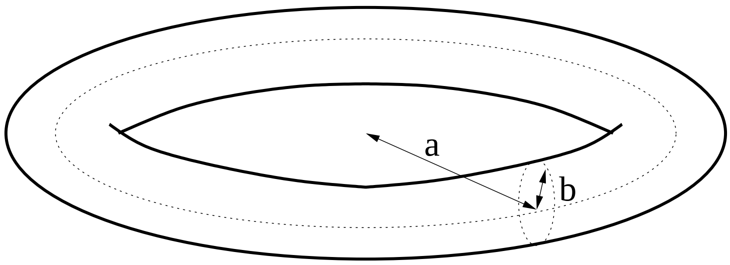

FIGURE 1 – *tore de paramètres a et b*

——————— *FIN DE L'ÉNONCÉ* ———————