Examen du cours “EDO et modélisation”

Vendredi 13 novembre 2020 – Distanciel – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents distribués dans le cadre de ce cours (polycopié et notes de cours).
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.
Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = (1 - y(t) - 2x(t))x(t), \\ y'(t) = (x(t) - 1)y(t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

1.1. Prouver que, pour toutes données $(t_0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, l'EDO (1) admet une unique solution maximale $(J, (x, y))$.

1.2. Trouver les points d'équilibre de l'EDO (1).

1.3. Pour chaque point d'équilibre trouvé, tracer l'allure du portrait de phase du système linéarisé en ce point et préciser si $(0, 0)$ est stable, asymptotiquement stable ou instable.

1.4. Préciser, pour chaque point d'équilibre, si l'allure du portrait de phase de l'EDO linéarisée permet de connaître celle de l'EDO non-linéaire (1). Tenter de tracer un portrait de phase complet de l'EDO (1) dans $\mathbb{R}^2$.

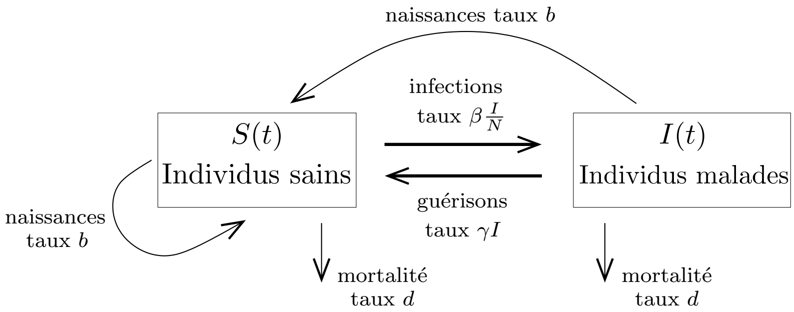
Exercice 2. (Propagation d'une maladie) La propagation simplifiée d'une maladie non mortelle mais qui ne confère pas d'immunité[1] peut se modéliser de la façon suivante : la population totale $N(t)$ au temps t est divisée en 2 groupes[2], le groupe $S(t)$ des individus sains et le groupe $I(t)$ des individus malades ou infectés, avec $N(t) = S(t) + I(t)$. On décrit les flux entre les deux groupes, schématisés sur la Figure ci-dessous, à l'aide d'EDO en se basant sur les hypothèses suivantes :

- Le taux de naissance $b > 0$ est le même au sein de la population S et I et tous les individus naissent sains, donc une fraction $b(S + I)$ est ajoutée à la population S par unité de temps.
- La maladie est non-mortelle donc le taux de mortalité $d > 0$ n'est pas lié à la maladie et est le même au sein des 2 populations S et I qui perdent donc chacune respectivement une fraction $d\,S$ et $d\,I$ par unité de temps.

Tournez svp

[1] c'est-à-dire que les individus guéris peuvent à nouveau être infectés.
[2] Comme on travaille avec de grandes populations, on supposera pour simplifier que N, S, I ne sont pas entiers mais réels.

- Le taux de transmission par individu malade est $\beta > 0$. Autrement dit, la population saine S est infectée avec un taux $\beta I/N$ par unité de temps et perd donc une fraction $\beta IS/N$ par unité de temps.
- Le taux de guérison est $\gamma > 0$ c'est-à-dire qu'une fraction γI de la population I redevient saine par unité de temps.



Les 8 questions qui suivent sont très largement indépendantes et peuvent être traitées sans avoir résolu les précédentes quitte à admettre certains résultats.

2.1. Écrire les variations ΔS et ΔI de chacune des populations pendant un temps Δt et en déduire le système des 2 EDO qui régissent les évolutions de $S(t)$ et $I(t)$.

À partir de maintenant, on considère que le taux de naissances est égal au taux de mortalité, $b = d$, pour que la population reste constante. On considère que le système d'EDO qui régit les flux entre S et I est donné par

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta \frac{I(t)S(t)}{N(t)} + (b+\gamma)I(t), \\ I'(t) = \beta \frac{I(t)S(t)}{N(t)} - (b+\gamma)I(t), \end{cases} \tag{2}$$

2.2. Démontrer que la population reste bien constante : sur tout intervalle où il existe une solution $(N(t), S(t), I(t))$, on a $N(t) = N(0)$. Dans la suite, on supposera donc que $N(t) = S(t) + I(t)$ est égal à une constante N.

2.3. Soit $N > 0$ et $\alpha \in [0, 1]$. Démontrer que, pour toute condition initiale $(S(0), I(0)) = (\alpha N, (1-\alpha)N)$, il existe une unique solution maximale $(J, (S(t), I(t)))$ du système (2).[3]

2.4. Trouver explicitement la solution du système (2) lorsque $\alpha = 1$ et interpréter.

2.5. Démontrer que, sur l'intervalle J, $I(t)$ et $S(t)$ sont solutions de

$$I'(t) = a_1 I(t) - a_2 I(t)^2, \tag{3}$$
$$S'(t) = c_1 S(t)^2 - c_2 S(t) + c_3, \tag{4}$$

où $a_1 = \beta - (b+\gamma)$, $a_2 = \frac{\beta}{N}$ et $c_1, c_2, c_3 > 0$ sont à déterminer.

2.6. On veut démontrer que la solution $(J, (S(t), I(t)))$ est globale à droite.

2.6.1. Déduire de (3) que, si $I(0) > 0$, $I(t) > 0$ sur J.

Tournez svp

[3] J est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

2.6.2. Déduire de (4) que, si $S(0) > 0$, alors $S(t) > 0$ sur $J \cap [0, +\infty[$.
[On pourra raisonner par l'absurde en supposant que S s'annule pour la première fois en t_1 sur $J \cap [0, +\infty[$, remarquer que $t_1 > 0$, calculer $S'(t_1)$ avec (4), puis obtenir une contradiction en $S(t_1 - h)$, pour $h > 0$ petit, en écrivant un développement limité de S au point t_1.]

2.6.3. Déduire des deux questions précédentes que si $S(0), I(0) > 0$ alors $S(t), I(t) \in]0, N[$ sur $J \cap [0, +\infty[$ et conclure.

2.7. Résolution de (3). On définit $\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{b+\gamma}$ et on rappelle que $a_1 = \beta - (b+\gamma)$ et $a_2 = \frac{\beta}{N}$.

2.7.1. Démontrer que $I_0(t) \equiv 0$ et $I_{a_1/a_2}(t) \equiv \frac{a_1}{a_2} = (1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0})N$ sont des solutions stationnaires de (3).

2.7.2. On suppose maintenant que $\boxed{\mathcal{R}_0 = 1}$ (donc $a_1 = 0$). Placer les solutions stationnaires sur un dessin et démontrer que, pour $0 < I(0) < N$, la solution est donnée par

$$I(t) = \frac{I(0)}{1 + \frac{\beta I(0)}{N} t}.$$

Représenter son allure sur le dessin.

2.7.3. On suppose maintenant que $\boxed{\mathcal{R}_0 < 1}$ (et donc $a_1 < 0$). Placer les solutions stationnaires sur un dessin. On suppose que $0 < I(0) < N$. Démontrer que $I(t)$ est strictement décroissante et que la solution est donnée par

$$I(t) = \frac{A}{A \frac{a_2}{a_1} + e^{-a_1 t}}. \tag{5}$$

où $A = \frac{I(0)}{1 - \frac{a_2}{a_1} I(0)}$. Représenter son allure sur le dessin.

2.7.4. On suppose maintenant que $\boxed{\mathcal{R}_0 > 1}$ (et donc $a_1 > 0$). Placer les solutions stationnaires sur un dessin. On suppose que $0 < I(0) < N$. Expliquer pourquoi on peut distinguer 2 cas qui ne donnent pas des solutions stationnaires :
Cas 1. $I(0) \in]0, \frac{a_1}{a_2}[$ et alors $I(t) \in]0, \frac{a_1}{a_2}[$ pour tout $t \geq 0$;
Cas 2. $I(0) \in]\frac{a_1}{a_2}, N[$ et alors $I(t) \in]\frac{a_1}{a_2}, N[$ pour tout $t \geq 0$.
Démontrer que dans les 2 cas, la solution est donnée par la même formule (5) que dans la question 2.7.3. Représenter l'allure des solutions sur le dessin dans les deux cas.
[On montrera que dans le cas 1, la solution converge en croissant vers $\frac{a_1}{a_2} = (1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0})N$ et que dans le cas 2, elle converge en décroissant vers la même valeur.]

2.8. On veut connaître le comportement de (2) pour des temps grands. Démontrer que, pour toute condition initiale $(S(0), I(0)) = (\alpha N, (1-\alpha)N)$ avec $\alpha \in]0, 1[$,
– si $\mathcal{R}_0 \leq 1$, alors $(S(t), I(t)) \underset{t \to +\infty}{\rightarrow} (N, 0)$,
– si $\mathcal{R}_0 > 1$, alors $(S(t), I(t)) \underset{t \to +\infty}{\rightarrow} (\frac{1}{\mathcal{R}_0} N, (1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0})N)$.
Interpréter les résultats et commenter le fait que $\mathcal{R}_0$ est le nombre moyen de personnes qu'une personne malade peut infecter[4].

——————— FIN ———————

[4] $\mathcal{R}_0$ est appelé *nombre de reproduction de base.*