Examen du cours "EDO et modélisation"

Lundi 21 octobre 2024 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents distribués dans le cadre de ce cours (polycopié).
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x' = -y + ax(x^2+y^2), \\ y' = x + ay(x^2+y^2), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

1.1. Écrire l'EDO sous la forme $Y'(t) = F(Y(t))$ avec $Y = (x, y)$ et $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Prouver que pour toute donnée $Y_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, le problème de Cauchy (1) assorti de la condition initiale $Y(0) = Y_0$ admet une unique solution maximale $(]S, T[, Y)$ avec $S < 0 < T$.

1.2. Démontrer que $(0, 0)$ est le seul point d'équilibre de l'EDO (1).

1.3. Écrire l'EDO linéarisée de (1) au voisinage de $(0, 0)$ et étudier le système linéarisé. Est-ce que le théorème d'Hartman-Grobman s'applique ?
[On tracera l'allure des trajectoires en s'aidant du polycopié.]

1.4. On pose $\rho(t) = x(t)^2 + y(t)^2$ pour tout $t \in]S, T[$. Écrire l'EDO satisfaite par ρ. Décrire brièvement l'allure des solutions suivant les valeurs de a.
[On pourra utiliser les résultats de l'Exercice 1.4 de TD.]

1.5. Déduire de la question précédente la stabilité de $(0, 0)$ pour l'EDO (1) selon les valeurs de a et proposer un schéma pour l'allure des trajectoires.

Tourner la page SVP

Exercice 2. On s'intéresse à une population de poissons dans une zone de pêche. On notera $x(t)$ la quantité (normalisée) de poissons au temps t et on suppose que l'évolution de la quantité de poisson est gouvernée par une EDO de la forme

$$x' = f(x), \quad t \geq 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{2}$$

où x_0 est la population de poisson au temps initial.

Supposez que vous êtes en charge de la préservation des poissons. Le but est surveiller l'évolution de la population suivant plusieurs scénarios modélisés par des fonctions f polynomiales différentes.

2.1. On commence par étudier quelques aspects mathématiques de l'EDO quand f est un polynôme.

2.1.1. Démontrer que l'EDO (2) a une unique solution maximale pour toute donnée initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.1.2. Soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ les racines réelles du polynôme f. Que peut-on dire des a_i relativement à l'EDO (2) ? Que peut-on dire des fonctions constantes $y_i(t) = a_i$?

2.1.3. On fixe deux racines consécutives $a_i < a_{i+1}$ de f et on choisit la donnée initiale $x_0 \in]a_i, a_{i+1}[$. Décrire la solution de (2) et tracer son allure en distinguant les cas où $f > 0$ ou $f < 0$ dans $]a_i, a_{i+1}[$.

[On démontrera que la solution est globale et on étudiera sa monotonie. Dans chacun des cas, on reproduira et complètera la Figure 1 sur la copie en plaçant clairement a_i, a_{i+1} et x_0 sur l'axe des ordonnées.]

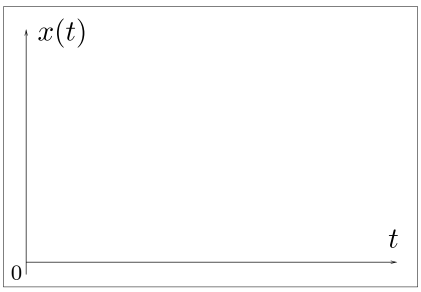

Figure 1

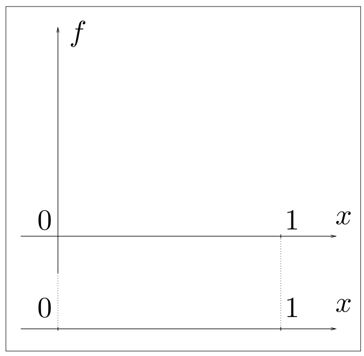

Figure 2

2.2. On considère le cas où (2) modélise l'évolution de la population de poissons sans pêche, pour lequel $f(x) = x(1-x)$ (cas normalisé de l'équation logistique de Verhulst, cf. Exercice 9 de TD).

2.2.1. Quels sont les points d'équilibre du système ?

2.2.2. Tracer f et le portrait de phase de l'EDO (2). Tracer l'allure de solutions de (2).

[On reproduira sur la copie les Figures 1 (pour les solutions) et 2 (pour f et le portrait de phase) qu'on complètera (rapidement). Pour f, on demande les éléments caractéristiques (allure, racine, maximum). Pour les solutions, on demande de tracer l'allure suivant $x_0 \geq 0$ sans faire de calculs ; on pourra consulter ce qui a été fait dans l'Exercice 9.]

2.2.3. Décrire qualitativement l'évolution de la population de poissons.

[En particulier, on sera amené à parler de la stabilité des points d'équilibre.]

Tourner la page SVP

2.3. On considère maintenant que la pêche est permise mais avec un système de quota fixe (toujours supposé utilisé au maximum). Cela consiste à choisir $\underline{f(x) = x(1-x) - q}$ où q est une constante positive.

2.3.1. Cas $\underline{0 < q < \frac{1}{4}}$. Tracer f et le portrait de phase correspondant sur un schéma du type de la Figure 2. On notera a_1 et a_2 les deux équilibres de (2) (on ne demande pas de les calculer explicitement mais seulement de les encadrer en supposant que $a_1 < a_2$ et de discuter de leur stabilité). Décrire qualitativement l'évolution du stock de poissons (on pourra compléter le schéma de la Figure 1).

2.3.2. Cas $\underline{q = \frac{1}{4}}$. Tracer f et le portrait de phase correspondant sur un schéma du type de la Figure 2 en précisant le ou les équilibres et leur stabilité. Décrire qualitativement l'évolution du stock de poissons (on pourra compléter le schéma de la Figure 1).

2.3.3. Cas $\underline{q > \frac{1}{4}}$. Même question qu'en 2.3.2. Que se passe-t-il forcément dans ce cas ?

2.3.4. Si on vous pousse à choisir le quota le plus élevé possible, lequel choisiriez-vous si vous êtes responsable de la durabilité du stock de poissons ? (justifiez et discutez brièvement de la solution choisie.)

2.4. On suppose maintenant qu'on a un assez bon suivi de la population de poissons, ce qui permet de mettre en place un système de quotas proportionnel à l'état de la population et conduit à prendre $\underline{f(x) = x(1-x) - px}$ où p est une constante positive.

2.4.1. Dans chacun des cas $0 < p < 1$, $p = 1$ et $p > 1$, tracer f et le portrait de phase correspondant sur un schéma du type de la Figure 2. Préciser à chaque fois les points d'équilibre et décrire qualitativement l'évolution du stock de poissons en complétant la Figure 1.

2.4.2. Expliquer pourquoi, pour des raisons de pêche durable, on fixe $0 < p < 1$ et que la quantité de poissons pêchés par unité de temps en régime stationnaire est alors px_{eq} où $x_{\text{eq}} = \lim_{t \to +\infty} x(t)$.

2.4.3. Pour des raisons économiques, on vous pousse à fixer p de façon à maximiser la quantité de poissons pêchés en régime stationnaire. Quelle est la valeur p_{opt} de p qui est optimale ? Y a-t-il un risque pour la viabilité de la population à choisir cette valeur p_{opt} ? Comparer avec le modèle de quota fixe de la question 2.3, quel système entre les deux vous paraît le meilleur pour préserver la ressource ?

——————— FIN ———————