Année universitaire 2022-2023
3ème année GMA-FISA

Examen GMA-FISA

Devoir Ecrit

Durée: 2h

26 Mai 2023

Calculatrices authorisées.
Les notes personnelles sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.

Exercice 1.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = e^{x-y} + y$$

Soient les fonctions g et h, définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \cos(t), \qquad h(t) = t^2 + 1$$

On définit la fonction u sur $\mathbb{R}$ par

$$u(t) = f(g(t), h(t))$$

1.1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de f, ainsi que les dérivées de g et h.

1.2. Exprimer la dérivée $u'(t)$ de la fonction u, en fonction des dérivées partielles de f et des dérivées des fonctions g et h.

1.3. Calculer $u'(t)$ en fonction de t.

2. Soit $l(x,y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$. Soient les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \qquad v(x,y) = x^2 - y^2$$

On exprime l en fonction de u et v sous la forme $l(x,y) = L(u(x,y), v(x,y))$.
Exprimer les dérivées partielles de l, $\frac{\partial l}{\partial x}$, $\frac{\partial l}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de L, $\frac{\partial L}{\partial u}$, $\frac{\partial L}{\partial v}$.

Exercice 2. A propos de l'équation d'advection

On s'intéresse au problème d'advection:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + v(t)\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = f(u(x,t)), \quad 0 \le x \le L, \ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le L \\ u(0,t) = g(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la caractéristique passant par $x_0 \in [0,L]$ au temps $t_0 > 0$, et les représenter sur un schéma pour chacune des situations suivantes:

1.1. $v(t) = v$, avec $v \in \mathbb{R}^{+*}$ une constante.

1.2. $v(t) = \alpha t^3 + \beta t$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$ des constantes.

1.3. $v(t) = 2te^{t^2}$.

2. Soit $x(t)$ une caractéristique. Donner l'EDO régissant la variation de u le long de cette caractéristique et donner la solution de cette EDO défninie à une constante près dans chacune des situations suivantes: (on ne cherchera pas à déterminer cette constante):

2.1. $f(u(x,t)) = 0$

2.2. $f(u(x,t)) = \frac{1}{2}u(x,t) + 4$

2.3. $f(u(x,t)) = tu(x,t) + \frac{t}{2}$

Exercice 3. Equation des ondes

Dans un tube de longueur L, on s'intéresse au problème:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L,\, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ u(0,t) = 0, \qquad t > 0 \\ u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \end{cases}$$

On cherche la solution du problème sous la forme $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$.

1. Retrouver les EDOs régissant les fonctions φ et ψ. Donner l'expression de $u(x,t)$.

2. Montrer qu'il existe une famille de solution satisfaisant les conditions de bord, s'écrivant sous la forme:

$$u_k(x,t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\psi_k(t)$$

3. On cherche la solution du problème sous la forme $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$. En utilisant les conditions initiales, donner l'expression de $u(x,t)$ dans les cas suivants:

3.1. $u_1(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$.

3.2. $u_1(x) = \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right)$.