INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2021-2022
3ème année GMA FISA

Examen du cours d'EDP

Mardi 30 mars 2022 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Seuls documents permis : les supports de cours et TD mis à disposition, vos notes personnelles manuscrites, les énoncés des feuilles de TD.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Le sujet comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère un fluide caloporteur parcourant à la vitesse constante $v > 0$ un tube de longueur L plongé dans un bain de refroidissement. La température $u(t,x)$ du fluide (en Kelvin) ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est modélisée par l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = \gamma(T_{\text{ext}} - u(t,x)) \qquad 0 < x < L, t > 0, \tag{1}$$

où T_{ext} est la température du bain de refroissement et $\gamma > 0$ est une constante donnée. On suppose que la température initiale dans le tube est $u(0,x) = T_0$ pour $0 \leq x \leq L$ et que la température d'entrée du fluide dans le tube est $u(t,0) = T_0$ pour $t \geq 0$, où $T_0 > T_{\text{ext}}$ est une température constante donnée.

1.1. Quelle est l'unité de la constante γ ?

1.2. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $x_0 \in [0,L]$ au temps $t_0 > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.3. Soit $x(t)$ une caractéristique. Écrire l'EDO régissant la variation de u le long de cette caractéristique. Donner la solution générale de cette EDO (définie à une constante d'intégration près).
[Pensez à une solution particulière évidente.]

1.4. Déterminer la température $u(t,x)$ dans le tube pour $0 < x < L$ et $t > 0$ en séparant les zones au-dessus et au-dessous de la caractéristique critique.

1.5. Tracer le graphe $t \mapsto u(t,L)$ de la température du fluide à la sortie du bain de refroissement.

1.6. À quelle vitesse maximale peut-on faire circuler le fluide dans le tube si on veut qu'en régime permanent (pour t grand), le fluide sorte avec une température au plus égale à $\frac{T_0+T_{\text{ext}}}{2}$?

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère une barre de métal de longueur L parfaitement isolée latéralement (cf. Figure 2). La température $u(t,x)$ dans la barre ne dépend que de l'abscisse x et est régie par le système suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad 0 \leq x \leq L,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad t > 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \qquad t > 0, \tag{4}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{5}$$

où $u_0 : [0,L] \to \mathbb{R}^+$ est définie par $u_0(x) = 20x/L$ pour $x \in [0, L/2]$ et $u_0(x) = 20(1 - x/L)$ pour $x \in [L/2, L]$.

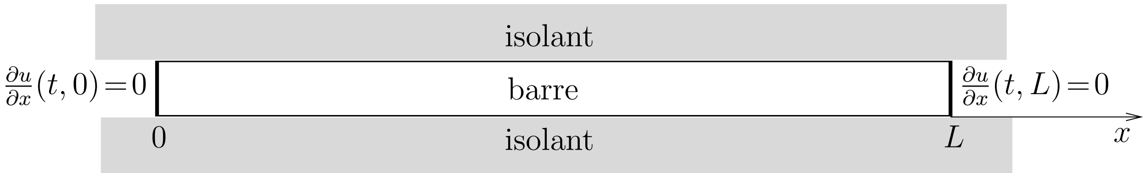

Figure 2 : la barre de métal

2.1. Expliquer à quoi correspondent physiquement les conditions au bord (3)-(4). Décrire qualitativement (sans résoudre l'équation) l'évolution de la température dans la barre en fonction du temps.

On se propose maintenant de retrouver mathématiquement l'évolution de la température en résolvant le système.

2.2. On cherche une solution de (2) sous la forme $v(t,x) = \phi(x)\psi(t)$. Écrire les équations différentielles ordinaires satisfaites par ϕ et ψ et donner leurs solutions générales.

2.3. Démontrer que si l'on cherche ϕ et ψ de manière à satisfaire de plus les conditions au bord (3)-(4), on trouve une infinité de solutions qui peuvent s'écrire $v_k(t,x) = \phi_k(x)\psi_k(t)$ avec $k = 0, 1, 2, ...$ Donner l'expression des $\phi_k(x), \psi_k(t)$.

2.4. Déterminer des constantes a_k, $k = 0, 1, 2, ...$, de sorte que l'on puisse écrire

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Calculer a_0 et les a_k pour $k \geq 1$.

[Indication : on pourra prolonger u_0 sur $[-L, 0[$ par parité, puis sur $\mathbb{R}$ par $2L$-périodicité et ensuite appliquer le théorème du développement en série de Fourier de l'exercice de la liste d'exercices 3. On admettra que le résultat de la question 2 est valide en remplaçant "sin" par "cos" et "impair" par "pair".]

2.5. Trouver la solution $u(t,x)$ du système complet sous la forme

$$u(t,x) = \frac{v_0(t,x)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(t,x)$$

en exploitant la condition initiale (5) et en utilisant la question précédente.

2.6. Quelle est la limite de $u(t,x)$ quand $t \to +\infty$?

FIN