INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2024-2025
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Mercredi 9 avril 2025 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents autorisés : les supports de cours et TD mis à disposition, le polycopié de rappel, vos notes personnelles manuscrites.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On considère un fluide caloporteur parcourant un tube de longueur L de section constante à la vitesse constante $v > 0$. La température moyenne du fluide ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est notée $u(t,x)$. Ce tube échange avec le milieu extérieur de sorte que l'évolution de la température est modélisée par l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + v\,\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 1 + u(t,x) \qquad 0 < x < L, t > 0.$$

1.1. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $x_0 \in [0,L]$ au temps $t_0 > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.2. Soit $x(t)$ une caractéristique. Écrire l'EDO régissant la variation de u le long de cette caractéristique. Donner la solution générale de cette EDO.

On suppose que la température initiale dans le tube est $u(0,x) = T_0$ pour $0 \le x \le L$ et que la température d'entrée du fluide dans le tube est $u(t,0) = T_0$ pour $t \ge 0$, où T_0 est une température constante donnée.

1.3. Déterminer la température $u(t,x)$ dans le tube pour $0 < x < L$ et $t > 0$.

On suppose maintenant que $\underline{v = 2}$, $\underline{L = 2}$, $\underline{T_0 = 1}$.

1.4. Tracer les graphes

$$\begin{array}{ll} t \mapsto u(t,2), & t > 0\,; \\ x \mapsto u(\frac{1}{2},x), & 0 \le x \le 2\,; \\ x \mapsto u(1,x), & 0 \le x \le 2. \end{array}$$

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère l'équation :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) &= 0 \qquad 0 < x < L,\ t > 0, && (1)\\
u(0,x) &= 0 \qquad 0 \le x \le L, && (2)\\
u(t,0) &= \sin(t) \qquad t > 0 && (3)\\
u(t,L) &= 0 \qquad t > 0. && (4)
\end{aligned}$$

2.1. Décrire une situation physique que peut modéliser ce problème.

Pour se ramener à une situation connue, on effectue le changement de fonction inconnue $v(t,x) = u(t,x) - (1 - \frac{x}{L})\sin t$.

2.2. Vérifier que v satisfait la nouvelle équation

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}(t,x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) &= f(x)g(t) \qquad 0 < x < L,\ t > 0, && (5)\\
v(0,x) &= v_0(x) \qquad 0 \le x \le L, && (6)\\
v(t,0) &= 0 \qquad t > 0 && (7)\\
v(t,L) &= 0 \qquad t > 0, && (8)
\end{aligned}$$

en donnant les valeurs de v_0, $f(x)$ et $g(t)$.

On va résoudre (5)-(6)-(7)-(8) en cherchant la solution sous la forme

$$v(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \psi_k(t) \sin(\omega_k x) \quad \text{avec } \omega_k = \frac{k\pi}{L}. \tag{9}$$

2.3. Vérifier que la fonction v donnée par (9) satisfait bien les conditions aux limites (7)-(8).

2.4. En développant en série de Fourier un prolongement périodique convenable de la fonction $1 - \frac{x}{L}$, $0 \le x \le L$, trouver des b_k, $k \ge 1$, de sorte que

$$1 - \frac{x}{L} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin(\omega_k x) \quad \text{pour } 0 < x < L.$$

2.5. En utilisant la question précédente, démontrer que v donnée par (9) est solution de (5) si, pour tout $k \ge 1$, la fonction $\psi_k(t)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\psi_k'(t) + \omega_k^2 \psi_k(t) = \gamma_k \cos t \tag{10}$$

où on déterminera les γ_k en fonction des b_k précédents puis en fonction de k.

2.6. Trouver la solution générale de (10).
[On pourra utiliser la méthode de variation de la constante.]

2.7. En exploitant la condition initiale (6), déterminer complètement les $\psi_k(t)$ et donner v. En déduire la solution u de (1)-(2)-(3)-(4).

FIN