Année universitaire 2023-2024
3ème année GMA

Examen du cours d'EDP

Lundi 25 mars 2024 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents autorisés : les supports de cours et TD mis à disposition, le polycopié de rappel, vos notes personnelles manuscrites.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On considère l'EDP de transport suivante dans un tube semi-infini

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = -ru & t > 0,\ x > 0, \\ u(t,0) = \theta(t) & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & x > 0, \end{cases} \tag{*}$$

où la vitesse $c > 0$ et $r \geq 0$ sont des constantes données.

1.1. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $\bar{x} > 0$ au temps $\bar{t} > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.2. Résoudre le problème dans le cas $r = 0$.
[On pourra donner directement la solution en se servant du cours ou des TD mais en respectant les notations de l'énoncé et le fait que le tube est semi-infini.]

1.3. Résoudre le problème dans le cas $r > 0$.
[On pourra se servir des TD et se limiter à donner les étapes les plus importantes.]

On suppose maintenant qu'un fluide incompressible, composé de deux types de particules A et B, circule dans le tube semi-infini à vitesse constante $c > 0$ et que des particules A se transforment en B et réciproquement avec le même coefficient d'échange constant $\sigma > 0$. Les concentrations respectives $c_A(t,x)$ et $c_B(t,x)$ de particules A et B dans le tube satisfont alors le système couplé d'EDP de transport suivant

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_A}{\partial t} + c\dfrac{\partial c_A}{\partial x} = \sigma(c_B - c_A) & t > 0,\ x > 0, \\ \dfrac{\partial c_B}{\partial t} + c\dfrac{\partial c_B}{\partial x} = \sigma(c_A - c_B) & t > 0,\ x > 0, \\ c_A(t,0) = \beta, \quad c_B(t,0) = 1 - \beta & t > 0, \\ c_A(0,x) = \beta, \quad c_B(0,x) = 1 - \beta & x > 0, \end{cases}$$

où $0 \leq \beta \leq 1$ est une constante fixée donnant le taux de mélange à l'instant initial et à l'entrée du tube.

1.4. Soit $u(t,x) = c_A(t,x) + c_B(t,x)$ et $v(t,x) = c_A(t,x) - c_B(t,x)$. Écrire le problème de type (*) satisfait par u et celui satisfait par v.

1.5. Résoudre le problème satisfait par u *[on pourra utiliser 1.2]*. Pouvait-on deviner la solution sans calculs ?

1.6. Résoudre le problème satisfait par v *[on pourra utiliser 1.3]*.

1.7. En déduire $c_A(t,x)$ et $c_B(t,x)$ pour tous $t>0$ et $x>0$.

1.8. Soient $x(t)$ une caractéristique. Que valent les limites $c_A(t,x(t))$ et $c_B(t,x(t))$ quand $t\to+\infty$? Interpréter.

Exercice 2. On considère l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = -\gamma\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0<x<L,\ t>0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = f(x), \qquad 0\le x\le L, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \qquad 0\le x\le L, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \qquad t>0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, \qquad t>0, \tag{5}$$

où L, c, γ sont des constantes strictement positives et $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ est donnée.

La plupart des questions peuvent être traitées sans avoir résolu complètement les précédentes.

2.1. Quelles sont les unités de c et γ ?

2.2. On cherche une solution de (1) à variables séparées sous la forme $u(t,x)=\phi(x)\psi(t)$. Démontrer que ϕ et ψ satisfont des EDO du second ordre linéaires à coefficients constants de la forme

$$\phi''(x) + a_1\phi(x) = 0, \tag{6}$$

$$\psi''(t) + a_2\psi'(t) + a_3\psi(t) = 0, \tag{7}$$

où a_1, a_2, a_3 sont à calculer en fonction de c, γ et $\omega^2 = -\dfrac{\phi''(x_0)}{\phi(x_0)} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\psi''(t_0)+\gamma\psi'(t_0)}{\psi(t_0)}$.

À partir de maintenant, on suppose que ω est un réel tel que $\underline{4c^2\omega^2>\gamma^2}$.

2.3.1. Donner la solution générale de (6).

2.3.2. Démontrer que la solution générale de (7) est $\psi(t)=e^{-\gamma t/2}\left(C\cos(\frac{\delta t}{2})+D\sin(\frac{\delta t}{2})\right)$ avec C, D constantes réelles et $\delta=\sqrt{4c^2\omega^2-\gamma^2}$.

2.4. Démonter qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant (1)-(4)-(5) de la forme

$$u_k(t,x) = e^{-\gamma t/2}\left(C_k\cos(\frac{\delta_k}{2}t) + D_k\sin(\frac{\delta_k}{2}t)\right)\cos(\omega_k x), \tag{8}$$

où $k = 1, 2, 3, ...$, $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$, $\delta_k = \sqrt{4c^2\omega_k^2 - \gamma^2}$ et C_k, D_k sont des constantes réelles quelconques.

On définit la fonction $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{L}{2}]$ et $f(x) = -1$ si $x \in]\frac{L}{2}, L]$.

2.5. Déterminer une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels tels que

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k \cos(\omega_k x) \quad \text{pour tout point de continuité } x \text{ dans } [0, L].$$

[On admettra que les α_k, pour $k = 0, 1, 2, \cdots$, sont donnés par une adaptation évidente de la formule des b_k dans la question 2 de l'exercice de la liste 3 des TD. La preuve, qu'on ne demande pas de faire, repose sur un prolongement de f par parité sur $[-L, 0]$ puis par $2L$-périodicité sur $\mathbb{R}$.]

2.6. En exploitant les conditions initiales, trouver la solution du problème complet (1)-(2)-(3)-(4)-(5) sous la forme $u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t, x)$.

2.7. Quelle est la limite de $u(t, x)$ quand $t \to +\infty$? À quoi correspond physiquement le terme $\gamma \frac{\partial u}{\partial t}$ dans l'équation (1) ?

2.8. Proposer une situation physique qui pourrait être modélisée par ce problème. *[En particulier : quel est la nature de l'EDP (1) ? des conditions aux bord (4)-(5) ? Que signifient les conditions initiales (2)-(3) ?]*