

# Correction de l'examen d'EDO d'octobre 2023

## Exercice 1

1.1 l'EDO (1) s'écrit 
$$\begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(0) = Y_0 = (x_0, y_0) \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \text{ avec } Y(t) = (x(t), y(t))$$

et  $F(Y) = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) = (-x^5 - y, 3x - y)$ .

La fonction  $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est polynomiale donc de classe  $C^\infty$ .  
Il suit qu'elle est localement lipschitzienne et donc, par le théorème de Cauchy-Lipschitz local, il existe une unique solution maximale  $(]S, T[, Y)$  avec  $0 \in ]S, T[$ .

1.2 Les points d'équilibre sont les solutions de  $F(Y) = (0, 0)$   

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ -x^5 - 3x = -x(x^4 + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Il y a donc un unique point d'équilibre  $(0, 0)$ .

1.3 La fonction  $V(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$  est polynomiale donc  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

• Si  $\alpha, \beta > 0$  dans  $V(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $V(0, 0) = 0 < \alpha x^2 + \beta y^2 = V(x, y)$   
donc  $(0, 0)$  est minimum strict de  $V$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

•  $V(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $\langle F(x, y), \nabla V(x, y) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -x^5 - y \\ 3x - y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ 2\beta y \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= -2\alpha x^6 - 2\alpha xy + 6\beta xy - 2\beta y^2$$

$$< (6\beta - 2\alpha)xy.$$

Si  $\alpha = 3\beta$ , par exemple  $\alpha = 3$  et  $\beta = 1$  dans  $\langle F(x, y), \nabla V(x, y) \rangle < 0$ .

1.4 Par 1.2, la fonction nulle  $t \mapsto (0, 0)$  est une solution stationnaire de (1). Il suit par unicité que si  $Y_0 \neq (0, 0)$  dans la solution  $Y(t)$  dérivant de  $Y_0$  ne peut pas s'annuler. Par ailleurs, la fonction  $f$  est au moins de classe  $C^1$  sur  $[0, T[$  par composition.

Il suit:  $\forall t \in [0, T[$ ,  $f'(t) = \frac{d}{dt} V(Y(t)) = \langle \nabla V(Y(t)), Y(t) \rangle = \langle \nabla V(Y(t)), F(Y(t)) \rangle < 0$  par 1.3 car  $Y(t) \neq (0,0)$ .

On conclut donc que  $f$  est strictement décroissante sur  $[0, T[$ .

1.5 Par décroissance de  $f$ , on obtient  $\forall t \in [0, T[$ ,  $\|Y(t)\|^2 = x(t)^2 + y(t)^2 \leq f(t) = 3x(t)^2 + y(t)^2 \leq f(0) = 3x_0^2 + y_0^2$ .  
On en déduit que  $Y(t)$  est borné sur  $[0, T[$ . Par le théorème d'explosion en temps fini, nécessairement  $T = +\infty$ .

1.6 La fonction  $V$  est une fonction de Lyapunov sur  $\mathbb{R}^2$  pour le point d'équilibre  $(0,0)$  (cf. cours). Comme  $V$  est strictement décroissante le long des trajectoires solutions non stationnaires, on en déduit que  $(0,0)$  est asymptotiquement stable.

1.7 L'EDO linéarisée au voisinage de  $(0,0)$  est  $Z'(t) = DF(0,0) Z(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} Z(t)$  (EDo lin)

car  $DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x^4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

•  $\Delta = (\text{tr}(DF(0,0)))^2 - 4 \det(DF(0,0)) = (-1)^2 - 4 \times 3 = -11 < 0$ .  
Comme de plus  $\text{tr}(DF(0,0)) = -1 < 0$ , on lit sur le poly que  $(0,0)$  est un foyer stable pour (EDo lin)



• Calculons les valeurs propres de  $DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda) + 3 = \lambda^2 + \lambda + 3 = (\lambda + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}i}{2}) (\lambda + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}i}{2})$$

donc les 2 valeurs propres complexes conjuguées de  $DF(0,0)$  ont une partie réelle  $-\frac{1}{2} \neq 0$  donc  $(0,0)$  est un point hyperbolique. On peut alors appliquer le théorème de Hartman-Grobman

qui nous dit que le portrait de phase de EDO lin et de l'EDO (1) ont même allure : on conclut que (0,0) est également un foyer stable pour (1) donc est asymptotiquement stable comme prouvé dans la question 1.6.

## Exercice 2

$$(2.1) \begin{cases} \Delta N(t) = bN(t)\Delta t - dN(t)\Delta t - v\beta S(t)\Delta t, \\ \Delta S(t) = bN(t)\Delta t - \beta S(t)\Delta t - dS(t)\Delta t \end{cases}$$

En divisant par  $\Delta t$  et en faisant  $\Delta t \rightarrow 0$ , on trouve l'EDO

$$\begin{cases} N'(t) = bN(t) - dN(t) - v\beta S(t) \\ S'(t) = bN(t) - \beta S(t) - dS(t) \end{cases}$$

(2.2) L'EDO (2) est un système différentiel linéaire  $\begin{pmatrix} N \\ S \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -v\beta \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N \\ S \end{pmatrix}$ , le pb de Cauchy admet donc une unique solution globale sur  $\mathbb{R}$  (ou alors on applique le théorème de Cauchy-Lipschitz à l'EDO  $(N, S)' = F(N, S) = (-v\beta S, -\beta S)$ .  
Mais  $\|F(N_1, S_1) - F(N_2, S_2)\| = \|(-v\beta(S_1 - S_2), -\beta(S_1 - S_2))\| \leq \beta\sqrt{1+v^2} |S_1 - S_2|$   
donc  $F$  est globalement Lipschitzienne et le thm de C-L global s'applique.)

(2.3) De façon évidente  $S(t) = e^{-\beta t} S_0$  avec  $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$  car  $\beta > 0$ .  
Cela signifie que chaque personne va être touchée par la variole à un moment ou un autre.

(2.4)  $\forall t > 0, z'(t) = \left(\frac{S}{N}\right)' = \frac{S'N - SN'}{N^2} = \frac{-\beta SN + v\beta S^2}{N^2} = -\beta z + v\beta z^2$   
donc  $z$  satisfait l'EDO de Bernoulli  $\boxed{z' + \beta z - v\beta z^2 = 0}$

(2.5)  $S(0) = S_0 = N_0 = N(0)$  ou  $z(0) = 1$  : cela signifie qu'en  $t = 0$ , personne dans la population n'a encore été touché par la variole.

2.6 On fait le changement de variable  $u = \frac{1}{z}$  dans l'EDO de 2.4:  
 $z' + \beta z - \nu \beta z^2 = -\frac{u'}{u^2} + \frac{\beta}{u} - \frac{\nu \beta}{u^2} = 0$  d'où l'EDO linéaire  
 satisfaite par la nouvelle fonction  $u$ :  $\boxed{u' = \beta u - \nu \beta}$   
 La solution de l'EDO homogène est  $Ce^{\beta t}$  ( $C$  constante)  
 et  $u = \nu$  est une solution particulière constante.  
 Il suit  $u(t) = Ce^{\beta t} + \nu$ . Comme  $u(0) = \frac{1}{z(0)} = 1$   
 on détermine  $C = 1 - \nu$  d'où  $u(t) = (1 - \nu)e^{\beta t} + \nu$   
 et  $\boxed{z(t) = \frac{1}{(1 - \nu)e^{\beta t} + \nu}}$ .

2.7 On a calculé  $S(t) = e^{-\beta t} S_0 = e^{-\beta t} N_0$  dans la question 2.3.  
 Il reste à trouver  $N(t)$ . Mais  $z(t) = \frac{S(t)}{N(t)}$   
 d'où  $N(t) = \frac{S(t)}{z(t)} = ((1 - \nu)e^{\beta t} + \nu) e^{-\beta t} N_0 = ((1 - \nu) + \nu e^{-\beta t}) N_0$ .  
 Finalement  $\boxed{\begin{cases} N(t) = (1 - \nu)N_0 + \nu e^{-\beta t} N_0 \\ S(t) = e^{-\beta t} N_0 \end{cases}}$

2.8  $\boxed{\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = (1 - \nu)N_0}$

2.9 Si une proportion  $\lambda$  de la population a été vaccinée, cela signifie qu'au temps  $t=0$ ,  $\lambda N_0 = I(0)$  personnes sont immunisées et le nombre initial de susceptibles est donc  $S(0) = (1 - \lambda)N_0$ .

2.10 En reprenant les calculs précédents avec la nouvelle condition initiale  $S(0) = (1 - \lambda)N_0$ , on trouve  $S(t) = e^{-\beta t} (1 - \lambda)N_0$ ,  
 $z(0) = \frac{S(0)}{N(0)} = 1 - \lambda$  puis  $u(0) = \frac{1}{z(0)} = \frac{1}{1 - \lambda}$ .

On trouve alors  $\frac{1}{z(t)} = u(t) = \left(\frac{1}{1 - \lambda} - \nu\right) e^{\beta t} + \nu$

ce qui donne  $N(t) = \frac{S(t)}{z(t)} = \left(\left(\frac{1}{1 - \lambda} - \nu\right) e^{\beta t} + \nu\right) e^{-\beta t} (1 - \lambda)N_0$

Finalement  $N(t) = (1 - v(1-\lambda) + v(1-\lambda)e^{-\beta t})N_0$ .

On obtient  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = (1 - v(1-\lambda))N_0$ .

La vaccination a un effet bénéfique puisqu'elle stabilise la population à une valeur  $(1 - v(1-\lambda))N_0$  supérieure à  $(1-v)N_0$  trouvée dans la question 2-8.

Idealement, si tout le monde est vacciné ( $\lambda = 1$ ) alors  $N(t) \equiv N_0$ .