Correction examen EDO 3MA - octobre 2024

Exercice 1

(1.1) On a $Y' = (F_1(Y), F_2(Y))$ avec $\begin{cases} F_1(Y) = F_1(x,y) = -y + ax(x^2+y^2) \\ F_2(Y) = F_2(x,y) = x + ay(x^2+y^2). \end{cases}$

C'est une EDO du 1er ordre non-linéaire autonome avec $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ (car polynomiale). Donc F est loc. lipschitzienne et par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution maximale (J, Y) pour toute donnée initiale $(0, (x_0, y_0))$.
On a $0 \in J$ et on peut écrire $J =]S, T[$ avec $S < 0 < T$.

(1.2) (x,y) point d'équilibre $\Longleftrightarrow F(x,y) = (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} -y + ax(x^2+y^2) = 0 \\ x + ay(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$.

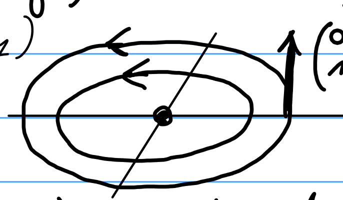
Si $a = 0$ alors immédiatement $(x,y) = (0,0)$ est l'unique point d'équilibre.
Si $a \neq 0$, en multipliant la 1ère égalité par x, la 2ème par y et en faisant la somme, on obtient $a(x^2+y^2) = 0$ ce qui donne $x = 0$ et $y = 0$.
Finalement $(0,0)$ est le seul point d'équilibre (dans tous les cas).

(1.3) $DF(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x^2+y^2) + 2ax^2 & -1 + 2axy \\ 1 + 2axy & a(x^2+y^2) + 2ay^2 \end{pmatrix}$ Matrice Jacobienne

et $DF(0,0) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d'où l'EDO linéarisée en $(0,0)$: $Z' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z$

$\begin{cases} \mathrm{tr} A = 0, \det A = 1 \\ \Delta = (\mathrm{tr} A)^2 - 4 \det A = -4 < 0 \end{cases}$ donc $(0,0)$ est un foyer (stable) (d'après le poly)

Allure des trajectoires de l'EDO linéarisée :



$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

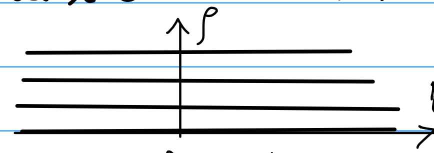
le polynôme caractéristique de A est $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$. Les valeurs propres sont imaginaires pures donc $(0,0)$ est non-hyperbolique pour l'EDO (1).

On ne peut donc pas appliquer le théorème d'Hartman-Grobman et on ne sait donc pas si $(0,0)$ est un foyer pour l'EDO non-linéaire (1) (on va voir que non - sauf si $a=0$ - dans les questions suivantes).

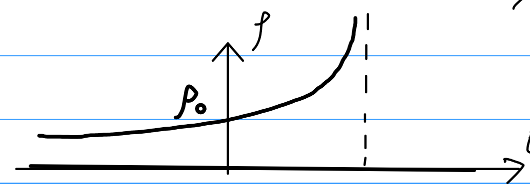
(1.4) $\forall t \in]S,T[$, $\rho'(t) = 2xx' + 2yy' = 2x(-y + ax(x^2+y^2)) + 2y(x + ay(x^2+y^2))$
$= 2a(x^2+y^2)^2 = 2a\rho(t)^2$ (en utilisant l'EDO (1))

Donc ρ vérifie l'EDO $\rho' = 2a\rho^2$ qui est similaire à celle étudiée dans l'Exercice 1.4 de TD : il existe une unique solution maximale $(\tilde{J}, \rho)$ sur $\tilde{J} \subset]S,T[$. D'après l'exercice 1-4 :

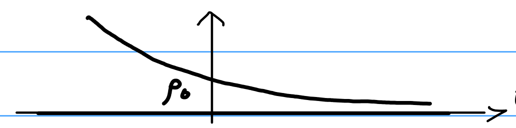
- $a=0$ $\rho(t) = \text{constante} = x_0^2 + y_0^2$ solutions globales



- $a>0$ ρ explose en temps fini à droite
$\rho_0 = x_0^2 + y_0^2$



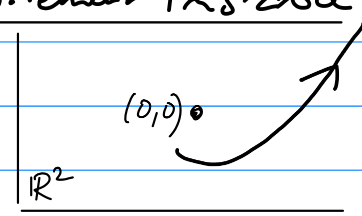
- $a<0$ ρ est globale à droite



(1.5) • $a=0$. D'après 1-4, les trajectoires sont des cercles, on retrouve en fait l'allure du linéarisé. $(0,0)$ est stable dans ce cas.

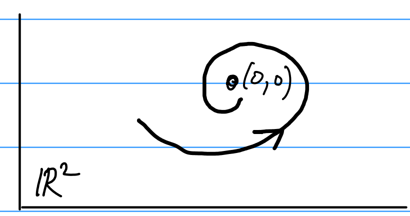
- $a>0$: $\rho(t) = \|Y(t)\|^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc explosion en temps fini pour tout $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ $(0,0)$ fortement instable

En réalité elles vont spirale
(un peu de travail en plus pour le voir)



- $a<0$: $\rho(t) = \|Y(t)\|^2 \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout (x_0,y_0)

$(0,0)$ asymptotiquement stable



Remarque : Cet exercice produit un contre-exemple au théorème de Hartman-Grobman dans le cas non-hyperbolique.

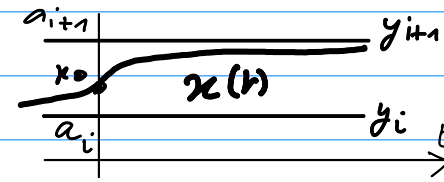
Exercice 2

2.1.1 Comme f est polynomiale, $f \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ est localement lipschitzienne et, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'EDO $y' = f(y)$ a une unique solution maximale (J, x) pour toute donnée initiale $x(t_0) = x_0$ $(t_0 \in J)$.

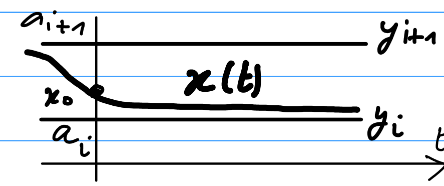
2.1.2 a_i racine de $f \Longleftrightarrow f(a_i) = 0 \Longleftrightarrow$ a_i est un point d'équilibre de EDO(2) et $y_i(t) \equiv a_i$ est une solution stationnaire.

2.1.3 Par unicité, les solutions de (2) ne peuvent pas se croiser donc, si $a_i < x_0 < a_{i+1}$, comme $y_i(t) = a_i$ et $y_{i+1}(t) = a_{i+1}$ sont solutions, la solution (J, x) satisfait : $\forall t \in J,\ a_i < x(t) < a_{i+1}$.
En particulier, $x(t)$ ne peut pas exploser donc est globale sur $\mathbb{R}$.

- Si $f > 0$ sur $]a_i, a_{i+1}[$ alors $x'(t) = f(x(t)) > 0$ et $t \mapsto x(t)$ est croissante sur $\mathbb{R}$

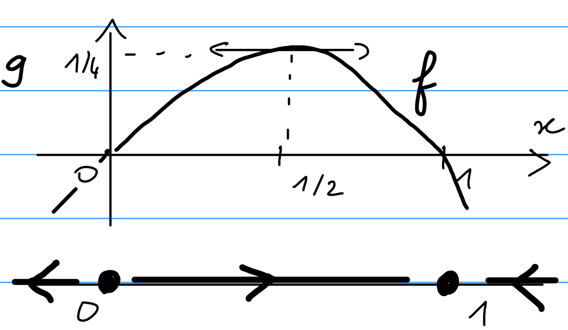


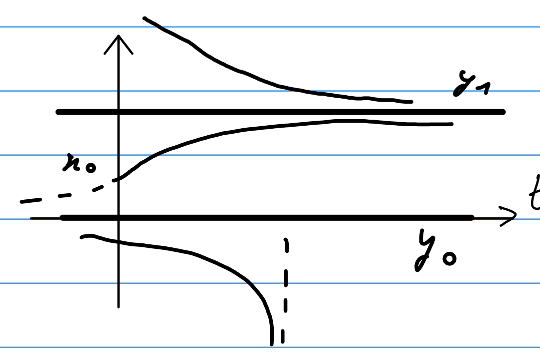
- Si $f < 0$ sur $]a_i, a_{i+1}[$ alors $x'(t) = f(x(t)) < 0$ et $t \mapsto x(t)$ est décroissante sur $\mathbb{R}$



2.2.1 x point d'équilibre $\Longleftrightarrow f(x) = x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$ $x = 0$ ou $x = 1$.

2.2.2 Cf. Exercice 9



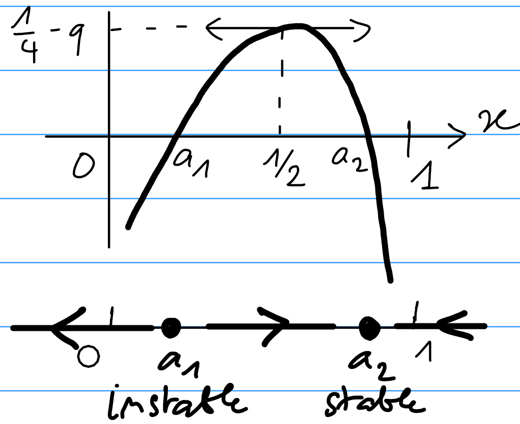


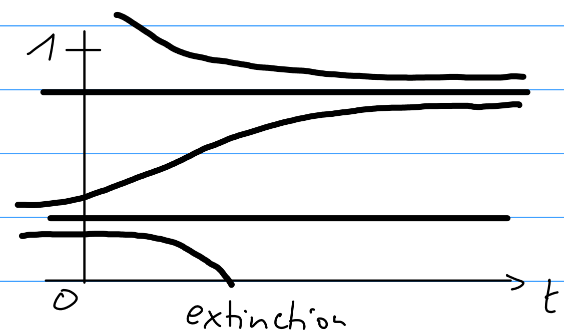
0 point d'équilibre instable et 1 point d'équilibre stable.

2.2.3 Pour toute donnée initiale réaliste (i.e. $0 < x_0 < 1$), la population tend à se stabiliser vers la capacité maximale du milieu (ici normalisée à 1) qui est équilibre asymptotiquement stable du système (même si on rajoute des poissons alors que $x(t) = 1$, la population va redescendre à 1).

2.3 On remarque que f est la translatée de f en 2.2 vers le bas de la valeur q.

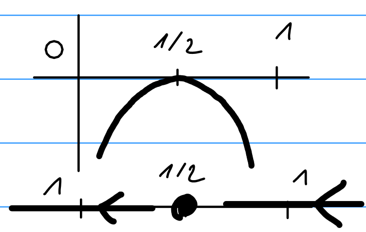
2.3.1 $0 < q < \frac{1}{4}$

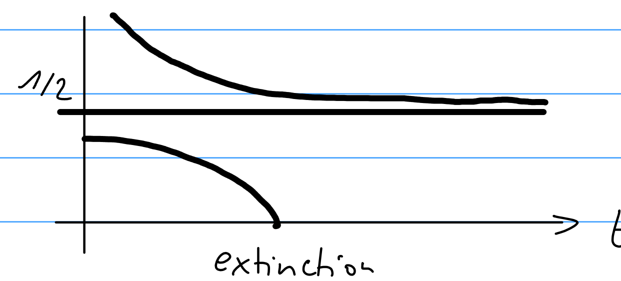




2 points d'équilibre : $0 < a_1 < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < a_2 < 1$. La population est viable entre a_1 et a_2 et se stabilise vers $a_1 < 1$ quand $t \to +\infty$. Si $x_0 < a_1$ alors extinction en temps fini.

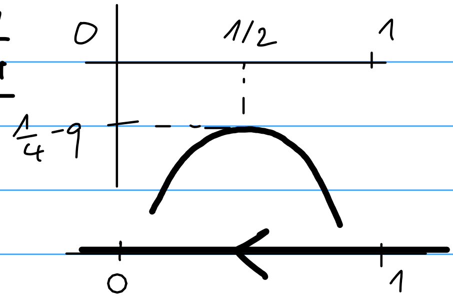
2.3.2 $q = \frac{1}{4}$

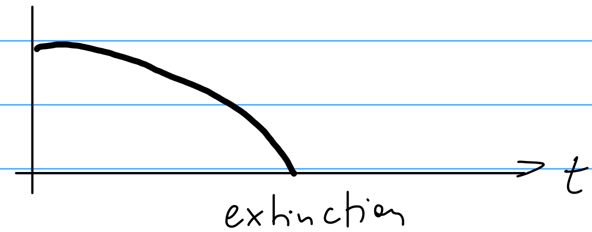




$\frac{1}{2}$ est le seul point d'équilibre instable. Il est très probable que la population disparaisse : elle va se stabiliser vers $1/2$ puis la moindre fluctuation vers le bas (épidémie, dépassement frauduleux du quota, etc.) va mener à une extinction en temps fini.

2.3.3 $q > \frac{1}{4}$



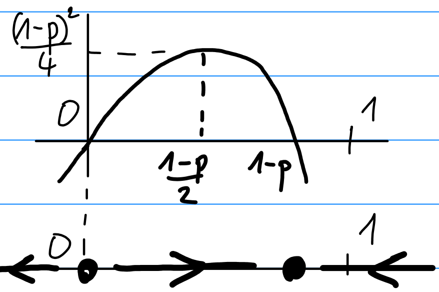


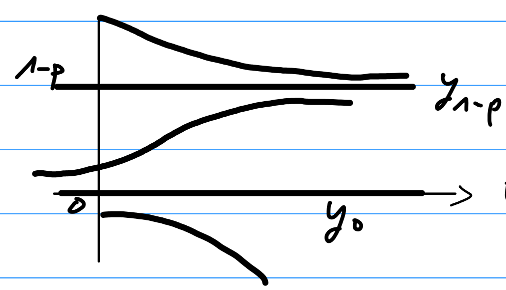
Il n'y a plus de point d'équilibre, la population décroît et disparaît en temps fini.

2.3.4 Il faut choisir $q < \frac{1}{4}$ de sorte que a_1 (qui dépend de q) soit plus petit que la population actuelle (sinon disparition). Il est difficile de fixer q grand (pour satisfaire les pêcheurs) sans risquer de provoquer la disparition des poissons.

Remarque : la quantité de pêche permise par unité de temps est donc q ($< \frac{1}{4}$).

2.4.1 • $0 < p < 1$

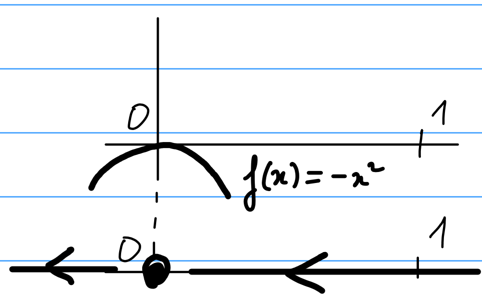


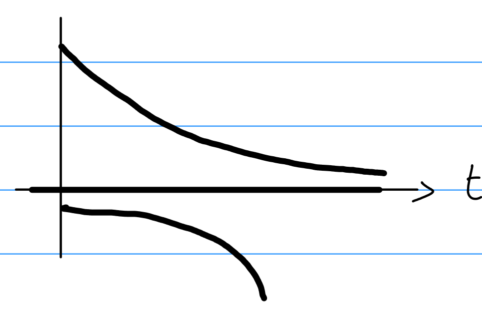


points d'équilibre : 0 (instable) et $1-p$ (asymptot. stable)

On retrouve le modèle logistique avec l'équilibre 1 baissé en $1-p$. La population est viable et se stabilise à $1-p$ (la fraction p est prélevée par la pêche)

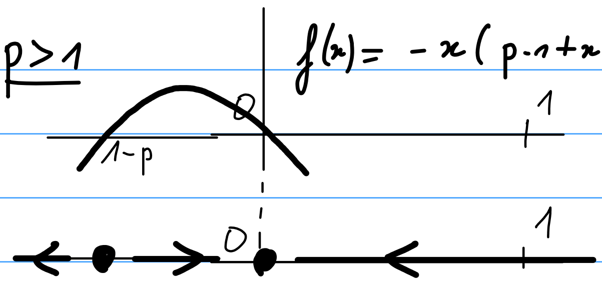
• $p = 1$

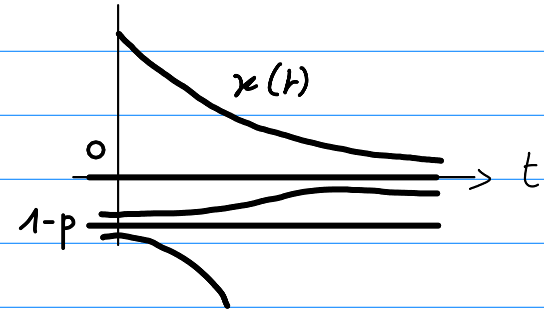




0 point d'équilibre instable : cela mène à la disparition des poissons quand $t \to +\infty$.

• $\underline{p>1}$





points d'équilibre 0 (instable) et $1-p$ (stable mais négatif).
Disparition assurée des poissons quand $t \to +\infty$

(2.4.2) le seul scénario viable dans ce cas de quota variable est de choisir $0<p<1$. On a alors $x(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1-p$
(régime stationnaire)

La quantité pêchée par unité de temps est $p\,x(t)$.
En régime stationnaire cela correspond à $p(1-p)$
Comme $\max\limits_{0\leq p\leq 1} p(1-p) = \frac{1}{4}$, atteint en $p=\frac{1}{2}$,

cela signifie que le meilleur choix (pour les pêcheurs) est $p=\frac{1}{2}$ ce qui permet de prélever $\frac{1}{4}$ des poissons.
C'est mieux que dans le cas du quota fixe où l'on doit choisin une quantité maximale pêchée de $q<\frac{1}{4}$ pour préserver la ressource. De plus, avec ce système de quota variable, on n'a pas de risque d'extinction car $p_{opt}=\frac{1}{2}$ correspond à un point d'équilipre $1-p_{opt}=\frac{1}{2}$ stable.
Le système de quota variable est donc bien mieux tant du point de vue écologique que économique pour les pêcheurs (mais il nécessite de surveiller la population en temps réel).