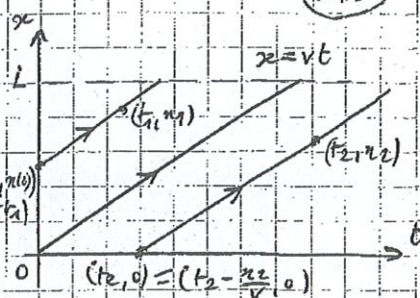


Exercice 1

(1.1) caractéristique : $\begin{cases} \dot{x}(t) = v \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ d'où $x(t) = x_0 + v(t-t_0)$

(1.2) $\frac{d}{dt} u(t, x(t)) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + \dot{x}(t) \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t))$
 $= \frac{\partial u}{\partial t}(t, x(t)) + v \frac{\partial u}{\partial x}(t, x(t)) = 1 + u(t, x(t))$



L'évolution de u le long de la caractéristique $x(t)$ satisfait $y' - y = 1$ EDO 1^{ère} ordre linéaire

Solution générale : $u(t, x(t)) = C e^t - 1$, C constante

(1.3) Zone I (t_1, x_1) tel que $x_1 > v t_1$

caractéristique passant par (t_1, x_1) : $x(t) = x_1 + v(t-t_1)$

Par la condition initiale : $u(0, x(0)) = u_0(x(0)) = T_0$ d'où $u(t, x(t)) = (T_0 + 1) e^t - 1$

D'autre part $u(0, x(0)) = C - 1$

$t = t_1$: $u(t_1, x_1) = (T_0 + 1) e^{t_1} - 1$

Zone II (t_2, x_2) tel que $x_2 < v t_2$

caractéristique passant par (t_2, x_2) : $x(t) = x_2 + v(t-t_2)$

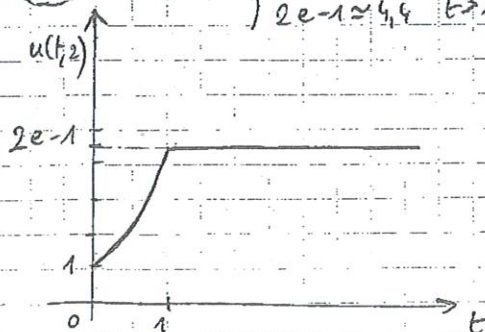
Par la condition d'entrée à gauche : $u(t_2, 0) = T_0$ d'où $C = (T_0 + 1) e^{\frac{x_2}{v} - t_2}$

D'autre part : $u(t_2, 0) = C e^{t_2} - 1 = C e^{\frac{x_2}{v} - t_2 + t_2} - 1$ $u(t, x(t)) = (T_0 + 1) e^{t - t_2 + \frac{x_2}{v}} - 1$

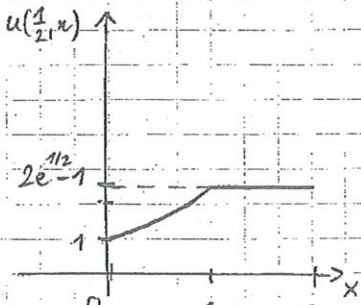
$t = t_2$: $u(t_2, x_2) = (T_0 + 1) e^{\frac{x_2}{v}} - 1$

Conclusion : $u(t, x) = \begin{cases} (T_0 + 1) e^t - 1 & x > vt \\ (T_0 + 1) e^{\frac{x}{v}} - 1 & x < vt \end{cases}$ Si $\begin{matrix} v=2 \\ L=2 \\ T_0=1 \end{matrix}$ $u(t, x) = \begin{cases} 2e^t - 1 & x > 2t \\ 2e^{\frac{x}{2}} - 1 & x < 2t \end{cases}$

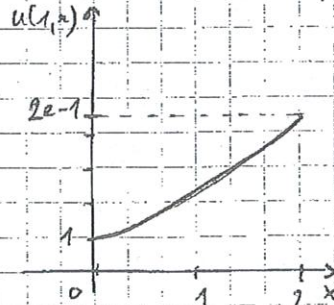
(1.4) $u(t, 2) = \begin{cases} 2e^t - 1 & t < 1 \\ 2e - 1 \approx 4.4 & t \geq 1 \end{cases}$



$u(\frac{1}{2}, x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \approx 2.3 & x > 1 \\ 2e^{x/2} - 1 & x < 1 \end{cases}$



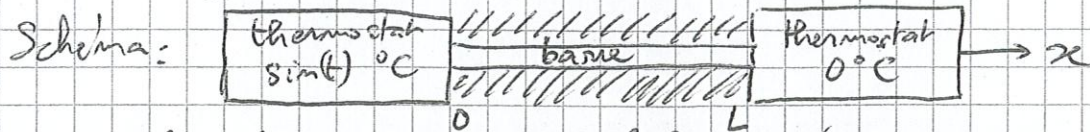
$u(1, x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ $0 < x < 2$



Exercice 2

2/3

- (2-1) Situation physique envisagée: Une barre de métal de longueur L isolée latéralement, portée au temps initial à la température 0°C , avec une source de chaleur de type thermostat oscillant au bord gauche et une source thermostat fixe à 0°C au bord droit.



$u(t, x)$ représente la température dans la barre à l'abscisse x et au temps t .

(2-2) $v(t, x) = u(t, x) - (1 - \frac{x}{L}) \sin t$

$v(t, 0) = u(t, 0) - \sin t = 0$ par (3)

$v(t, L) = u(t, L) - (1 - \frac{L}{L}) \sin t = 0$ par (4)

$v(0, x) = u(0, x) - (1 - \frac{x}{L}) \sin 0 = 0$ par (2) donc $v_0(x) = 0$

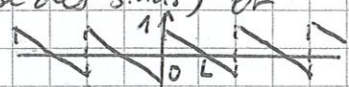
$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - (1 - \frac{x}{L}) \cos(t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(1 - \frac{x}{L}) \cos(t)$ par (1)

donc $f(x) = 1 - \frac{x}{L}, x \in [0, L]$ et $g(t) = -\cos(t), t \geq 0$

(2-3) $v(t, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \sin(\omega_k 0) = 0$

$v(t, L) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(t) \sin(\omega_k L) = 0$ car $\sin(\omega_k L) = \sin(k\pi) = 0, \forall k \geq 1$

(2-4) On prolonge $1 - \frac{x}{L}, 0 \leq x \leq L$ par impaire (à cause des sinus) et par $2L$ -périodicité (on a bien la fréquence $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$)



Le développement en série de Fourier du prolongement obtenu est

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k x)$ avec $b_k = \frac{2}{L} \int_0^L (1 - \frac{x}{L}) \sin(\frac{k\pi}{L} x) dx = \frac{2}{k\pi}$ après calculs

En tout point de continuité, donc $\forall x \in]0, L[$ on a: $1 - \frac{x}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \sin(\frac{k\pi}{L} x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega_k x)$

(2-5) En écrivant que v donnée par (9) satisfait (5), on obtient:

$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_k'(t) + \omega_k^2 \psi_k(t)) \sin(\omega_k x) = -(1 - \frac{x}{L}) \cos(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k\pi} \cos(t) \sin(\omega_k x)$
d'après (2-4)

D'où, par unicité du développement,

$\forall k \geq 1, \psi_k'(t) + \omega_k^2 \psi_k(t) = \frac{2}{k\pi} \cos(t)$ EDO 1^{er} ordre linéaire

$\psi_k = -\frac{2}{k\pi} = -b_k$

(2.6) Revoir la variation de la constante au besoin, on trouve

$$\underbrace{\psi_k(t)}_{\text{sol. gen. eq. hom.}} = C_k \underbrace{e^{-\omega_k^2 t}}_{\text{sol. particulière}} + \frac{\gamma_k}{\omega_k^4 + 1} (\omega_k^2 \cos(t) + \sin(t)), \quad C_k \text{ constante } k \geq 1$$

(2.7) Par (6), $v(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(0) \sin(\omega_k x) = 0$

d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k + \frac{\gamma_k \omega_k^2}{\omega_k^4 + 1} \right) \sin(\omega_k x) = 0$

Cela détermine les constantes $\left| C_k = - \frac{\gamma_k \omega_k^2}{\omega_k^4 + 1} \right.$

d'où
$$v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma_k \omega_k^2}{\omega_k^4 + 1} (\cos(t) - e^{-\omega_k^2 t}) + \frac{\gamma_k}{\omega_k^4 + 1} \sin(t) \right] \sin(\omega_k x)$$

avec $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$, $\gamma_k = \frac{-2}{k\pi}$

Et on en déduit u ,

$$u(t, x) = v(t, x) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin(t)$$

La solution est unique d'après ce qui a été vu en cours.