Année universitaire 2021-2022
Tronc Commun 3ème année - GMA FISA

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Vendredi 12 novembre 2021 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**
Département :	
Groupe :	

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{t}{1+t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $t^8 e^{-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$

☐ $\dfrac{t}{1+t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $t^8 e^{-t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$

2. Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^n + e^t}$ quand $n \to +\infty$?

☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ -1 ☐ 1 ☐ $e-1$ ☐ $1-e$ ☐ $\dfrac{1}{e}-1$ ☐ $1-\dfrac{1}{e}$ ☐ $+\infty$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ vaut

☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

4. La transformée de Fourier de $\dfrac{2}{1+2\pi i x}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $\dfrac{1}{2}H(\xi)e^{-\xi}$ ☐ $2H(x)e^{-x}$ ☐ $H(x)e^{-x}$

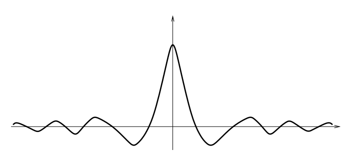
☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}H(-\xi)e^{\xi}$ ☐ $2H(-x)e^{x}$ ☐ $H(-x)e^{x}$

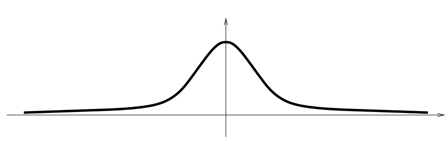
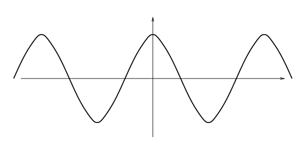
5. La transformée de Fourier de $e^{-\pi(t-4)^2}$ vaut

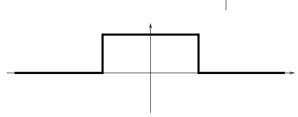
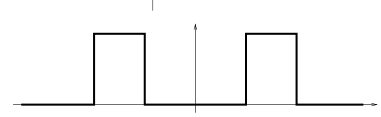
☐ n'existe pas ☐ $e^{-\pi(\xi-4)^2}$ ☐ $e^{-\pi(\xi+4)^2}$ ☐ $e^{-\pi(8i\xi+\xi^2)}$

☐ $e^{-\pi(4i\xi+\xi^2)}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2(\xi-4)^2}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi(8i\xi-\xi^2)}$ ☐ $e^{\pi(6i\xi-\xi^2)}$

6. Donner l'allure de la transformée de Fourier du signal f



☐  ☐ 

☐  ☐ 

☐ on ne peut pas tracer car $\hat{f}$ est complexe

Analyse complexe

7. Soit $f(z) = \dfrac{1}{z+3i}$ et $C(0,1)^+$ le cercle de centre 0 et de rayon 1 orienté dans le sens trigonométrique. On a :

- ☐ f n'est holomorphe nulle part
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-3i\}$
- ☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$
- ☐ f est prolongeable par continuité en $-3i$
- ☐ f admet un pôle d'ordre 1 en $-3i$
- ☐ f admet un pôle d'ordre 1 en $3i$
- ☐ $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0.$

8. Le développement en série entière *au voisinage de* 1 de la fonction f de la question 7 est :

- ☐ il n'existe pas
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(3i)^{n+1}} z^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+3i)^{n+1}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+3i)^{n+1}} (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n$
- ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z+3i)^n.$

9. Le rayon de convergence de la série entière obtenue dans la question 8 est :

☐ il n'existe pas ☐ 0 ☐ 1 ☐ $\sqrt{3}$ ☐ 2 ☐ $\sqrt{10}$ ☐ 4 ☐ $+\infty$.

10. Combien vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\pi x}}{x^2+4} dx$?

- ☐ 0
- ☐ π
- ☐ $2\pi i$
- ☐ $\dfrac{\pi}{2} e^{2\pi}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{2} e^{-2\pi}$
- ☐ n'est pas définie
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\pi e^{-2\pi}$
- ☐ $\pi e^{2\pi}$
- ☐ $-\dfrac{i}{4} e^{-2\pi}$

Correction du DS de novembre 2021 GMA FISA "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\frac{t}{1+t^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$, $\left|\dfrac{t}{1+t^2}\right| \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$ donc $\frac{t}{1+t^2}$ est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ mais pas dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
$t^8e^{-t^2}$ est continu sur $\mathbb{R}$. Comme, par croissances comparées, $|t^ke^{-t^2}| \underset{\pm\infty}{\to} 0$ pour tout $k>0$, on a $|t^8e^{-t^2}| \leq t^{-2}$ pour $t \geq A$ où A est assez grand, donc $t^8e^{-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
La fonction $\frac{\sin(t^2)}{t^2}$, est continue sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Par parité, on peut se limiter à étudier l'intégrabilité en 0 et en $+\infty$. Comme $\dfrac{\sin(t^2)}{t^2} \underset{t\to 0}{\to} 1$, on peut prolonger la fonction par continuité en 0 et elle est donc intégrable et de carré intégrable en 0. Pour $t \geq 1$, $\left|\frac{\sin(t^2)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. Comme $\frac{1}{t^2} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[) \cap \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$, on en déduit, par comparaison, que la fonction est intégrable et de carré intégrable en $+\infty$. Finalement $\frac{\sin(t^2)}{t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
La fonction $t \in]0,1[\mapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}$ est continue sur $]0,1]$. Comme $\left|\dfrac{\ln(1+t)}{t^{3/2}}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$ mais $\frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} \notin \mathrm{L}^2(]0,1[)$.

2. $f_n(t) = \dfrac{1}{t^n+e^t}$ est continue sur $[0,1]$ et $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} e^{-t}$ p.p. sur $[0,1]$. D'autre part, on a l'hypothèse de domination $|f_n(t)| \leq e^{-t} \leq 1 \in \mathrm{L}^1([0,1])$. Par le théorème de convergence dominée, l'intégrale tend vers $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}dt = 1 - \frac{1}{e}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2+y^2}e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$

4. D'après le tableau, on obtient $\mathcal{F}\left(\dfrac{2}{1+2i\pi x}\right)(\xi) = 2\mathcal{F}\left(\dfrac{1}{1+2i\pi x}\right)(\xi) = 2H(-\xi)e^{\xi}$.

5. Il suffit d'appliquer la formule de décalage en temps du cours à la transformée de Fourier de la gaussienne (donnée par le tableau pour $a=\pi$). On trouve $\widehat{e^{-\pi(t-4)^2}} = e^{-\pi(8i\xi+\xi^2)}$.

6. D'après le tableau ou par le théorème d'inversion dans L^2, on sait que la transformée de Fourier du sinus cardinal est un créneau centré.

7. La fonction f est une fraction rationnelle avec un pôle simple en $-3i$. Elle est donc holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\{-3i\}$. En particulier, le disque fermé $\overline{D}(0,1)$ de centre 0 et de rayon 1 est un compact à bord inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-3i\}$; par le théorème de Cauchy, $\int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 0$. Il y avait donc 3 cases à cocher.

8. f étant holomorphe en 1, elle est développable en série entière au voisinage de 1 :

$$f(z) = \frac{1}{1+3i+(z-1)} = \frac{1}{1+3i}\frac{1}{1+\frac{z-1}{1+3i}} = \frac{1}{1+3i}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+3i)^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+3i)^{n+1}}(z-1)^n.$$

9. Le rayon de convergence R sera le rayon du plus grand disque ouvert de centre 1 inclus dans $\mathbb{C}\setminus\{-3i\}$, soit $R = |1-(-3i)| = \sqrt{10}$ (distance de 1 à $-3i$). On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert avec le développement obtenu dans la question précédente ($\sum a_n(z-1)^n$ avec $a_n = (-1)^n(1+3i)^{-n-1}$).

10. L'intégrale demandée est du type de celles traitée en cours avec une fraction rationnelle sans pôle réel et de degré inférieur ou égal à -2. On pose $R(z) = \dfrac{e^{i\pi z}}{z^2+4} = \dfrac{e^{i\pi z}}{(z-2i)(z+2i)}$ qui a deux pôles $-2i$ et $2i$ d'ordre 1 mais seul $2i$ est au-dessus de l'axe des abscisses. On a donc que l'intégrale vaut $2\pi i\,\mathrm{Rés}(R,2i) = 2\pi i\ (z-2i)\left.\dfrac{e^{i\pi z}}{(z-2i)(z+2i)}\right|_{z=2i} = \dfrac{\pi}{2}e^{-2\pi}$. On pouvait aussi utiliser les transformées de Fourier en remarquant que l'intégrale vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-2\pi i(-\frac{1}{2})x}}{x^2+4}dx = \mathcal{F}(\frac{1}{x^2+4})(-\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2}e^{-4\pi|-\frac{1}{2}|}$ en utilisant le tableau.