Année universitaire 2024-2025
3GMA FISA

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Lundi 4 novembre 2024 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $t^4 e^{-\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1([0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\sin t}{t} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{t^{2/3}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$

☐ $t^4 e^{-\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\sin t}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{1}{t^{2/3}} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$

2. Pour $a > 0$, l'intégrale $I(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+at^2}$ vaut

☐ 0 ☐ $\sqrt{a}$ ☐ $\dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{\sqrt{a}}$ ☐ $\dfrac{\pi}{a}$ ☐ π ☐ $+\infty$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{x^2+y^2} e^{-3(x^2+y^2)} dxdy$ vaut

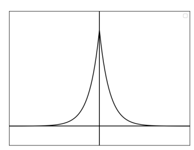
☐ 0 ☐ 1 ☐ $-\dfrac{\pi}{3}$ ☐ $\dfrac{\pi}{3}$ ☐ $-\dfrac{\pi}{6}$ ☐ $\dfrac{\pi}{6}$ ☐ $\dfrac{\pi}{12}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

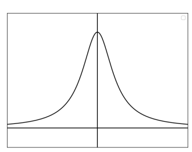
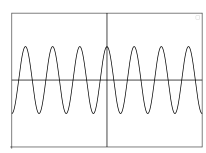
4. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = e^{-(x-b)^2}$. Alors

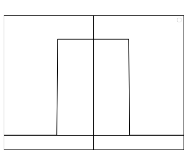
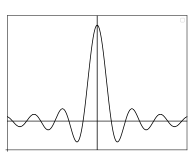
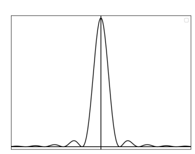
$\widehat{f}(\xi) =$ ☐ $\sqrt{\pi} e^{-(2i\pi\xi b + \pi^2\xi^2)}$ ☐ $\sqrt{\pi} e^{2i\pi\xi b - \pi^2\xi^2}$ ☐ $\dfrac{2e^{-2i\pi\xi b}}{1+4\pi^2\xi^2}$

$\widehat{f''}(\xi) =$ ☐ $-\sqrt{\pi}(2i\pi b + 2\pi^2\xi) e^{-(2i\pi\xi b+\pi^2\xi^2)}$ ☐ $-4\pi^{5/2}\xi^2 e^{-(2i\pi\xi b+\pi^2\xi^2)}$ ☐ $-4\pi^{5/2} e^{-(2i\pi\xi b+\pi^2\xi^2)}$

5. Donner l'allure de la transformée de Fourier de $e^{-|x|}$



☐ elle n'existe pas ☐  ☐ 

☐  ☐  ☐ 

6. Soit $g(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. Alors $\widehat{g * g}(\xi)$ vaut

☐ non défini ☐ 0 ☐ $\mathrm{sinc}^2(\xi)$ ☐ $4\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi) * \mathrm{sinc}(2\pi\xi)$

☐ $4\,\mathrm{sinc}(4\pi^2\xi^2)$ ☐ $4\,\mathrm{sinc}^2(2\pi\xi)$ ☐ $\mathbf{1}_{[-1,1]}(\xi)$ ☐ $4e^{-2i\pi\xi}\,\mathrm{sinc}^2(2\pi\xi)$

Analyse complexe

7. On définit le logarithme complexe principal $\mathrm{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (le plan complexe fendu privé du demi-axe des réels négatifs) en choisissant l'argument de z dans $]-\pi,\pi[$.

$\mathrm{Log}(-1) =$ ☐ 0 ☐ 1 ☐ i ☐ $i\frac{\pi}{2}$ ☐ n'existe pas

$\mathrm{Log}(3e^{i6\pi/5}) =$ ☐ $\ln 3 + i$ ☐ $\ln 3 + i\frac{6\pi}{5}$ ☐ $\ln 3 - i\frac{6\pi}{5}$ ☐ $\ln 3 - i\frac{4\pi}{5}$ ☐ n'existe pas

$\mathrm{Log}(1+\frac{z}{4}) =$ ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n}z^n$ ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n4^n}z^n$ ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}4^n}{n}z^n$ ☐ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n4^n}z^n$

avec un rayon de convergence

$R =$ ☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ $+\infty$

8. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}$ pour $z\in\mathbb{C}$.

$f(z) =$ ☐ 0 ☐ $\cos(z)$ ☐ $\sin(z)$ ☐ $\sin(\pi z)$ ☐ $-\pi\sin(\pi z)$ ☐ n'existe pas

$f'(z) =$ ☐ 0 ☐ $\cos(z)$ ☐ $-\pi^2\cos(\pi z)$ ☐ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^{2n+1}}{(2n)!}z^{2n}$

☐ $\sin(z)$ ☐ $-\sin(z)$ ☐ $\pi\cos(\pi z)$ ☐ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n)!}z^{2n}$ ☐ n'existe pas

9. Soit $g(z) = \dfrac{1}{z^2-\sqrt{2}z+1}$.

$g(z) =$ ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}z+1+i} - \frac{1}{\sqrt{2}z+1-i}$ ☐ $\frac{i}{\sqrt{2}z-1+i} - \frac{i}{\sqrt{2}z-1-i}$ ☐ $\frac{i}{\sqrt{2}z+1+i} - \frac{i}{\sqrt{2}z+1-i}$

☐ $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ ☐ $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{e^{i\pi/4},e^{-i\pi/4}\})$ ☐ $g\in\mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{e^{i3\pi/4},e^{-i3\pi/4}\})$

Le développement en série entière de g en $z=0$ est donné par

☐ n'existe pas ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}i(\sqrt{2})^n\left(\frac{1}{(i+1)^n}-\frac{1}{(1-i)^n}\right)z^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}(\sqrt{2})^n z^n$

☐ 0 ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}i(\sqrt{2})^n\left(\frac{1}{(i+1)^{n+1}}-\frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)z^n$ ☐ $\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{2}\sin(\frac{(n+1)\pi}{4})z^n$

Correction du DS de novembre 2024 3GMA FISA "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $t^4e^{-\sqrt{t}}$ est continu sur $[0,+\infty[$ donc le problème d'intégrabilité ne se pose qu'en $+\infty$. Par croissances comparées, $|t^k e^{-\sqrt{t}}| \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $k>0$, d'où $|t^4e^{-\sqrt{t}}| \leq t^{-2}$ pour $|t| \geq A$ où A est assez grand, donc $t^4e^{-\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1([0,+\infty[) \cap \mathrm{L}^2([0,+\infty[)$.
La fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais $\frac{\sin(t)}{t} \notin \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ (cf. cours). Comme $\left|\dfrac{\sin(t)}{t}\right|^2 \leq \dfrac{1}{t^2}$ sur $]1,+\infty[$, $\frac{\sin(t)}{t} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc les problèmes d'intégrabilité ne se posent qu'en $\pm\infty$. Par parité, il suffit d'étudier le cas de $+\infty$. Comme $0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ et que $\frac{1}{t} \notin L^1([1,+\infty[)$ mais $\frac{1}{t} \in L^2([1,+\infty[)$, on obtient que $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ mais est dans $L^2(\mathbb{R})$.
$\int_0^1 \frac{dt}{t^{2/3}}$ est une intégrale de référence de Riemann avec $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ et $2\alpha = \frac{4}{3} \geq 1$. On en déduit que $\frac{1}{t^{2/3}} \in L^1(]0,1[)$ et $\frac{1}{t^{2/3}} \notin L^2(]0,1[)$.

2. Par un calcul direct, en procédant à un changement de variable $s = \sqrt{a}t$, on a $I(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+at^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} [\arctan(s)]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}$.

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2}{x^2+y^2} e^{-3(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{+\infty} re^{-3r^2} dr = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \left[-\frac{1}{6}e^{-3r^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{6}$.

4. En utilisant la formule du décalage en temps pour la transformée de Fourier, on a $\widehat{e^{-(x-b)^2}} = e^{-2i\pi\xi b}\widehat{e^{-x^2}} = \sqrt{\pi}e^{-(2i\pi\xi b+\pi^2\xi^2)}$. D'autre part, d'après la formule de la transformée de Fourier de la dérivée, on a $\widehat{f''} = (2i\pi\xi)^2\widehat{f} = -4\pi^2\xi^2\sqrt{\pi}e^{-(2i\pi\xi b+\pi^2\xi^2)} = -4\pi^{5/2}\xi^2 e^{-(2i\pi\xi b+\pi^2\xi^2)}$.

5. D'après le formulaire, $\widehat{e^{-|x|}} = \frac{2}{1+4\pi^2\xi^2}$ qui est une fonction de type "cloche" (paire avec un maximum positif en zéro et décroissante vers 0 en $\pm\infty$). Il fallait donc cocher la case du milieu du haut.

6. D'après la formule de la transformée de Fourier d'un produit de convolution, on a $\widehat{g*g} = \widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]} * \mathbf{1}_{[-1,1]}} = (\widehat{\mathbf{1}_{[-1,1]}})^2$. Enfin, comme on connaît la transformée de Fourier du créneau, on obtient finalement $\widehat{g*g} = (2\,\mathrm{sinc}(2\pi\xi))^2 = 4\,\mathrm{sinc}^2(2\pi\xi)$.

7. Le réel négatif -1 n'appartient pas au plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ donc $\mathrm{Log}(-1)$ n'existe pas.
Le nombre complexe $3e^{i6\pi/5}$ n'est pas un réel négatif donc appartient au plan fendu $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$.
$\mathrm{Log}(3e^{i6\pi/5}) = \ln|3e^{i6\pi/5}| + i\mathrm{Arg}(3e^{i6\pi/5}) = \ln 3 - i\frac{4\pi}{5}$ (attention : $\frac{6\pi}{5} \notin]-\pi,\pi[$ et $\mathrm{Arg}(3e^{i6\pi/5}) = \frac{6\pi}{5} - 2\pi = -\frac{4\pi}{5}$).
En écrivant le développement en série entière de $\mathrm{Log}(1+z)$ (cf. cours) pour $z/4$, on obtient $\mathrm{Log}(1+\frac{z}{4}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n4^n} z^n$.
Le rayon de convergence du développement précédent est $R=4$. On le voit, soit en appliquant le critère de d'Alembert, soit en utilisant que le développement de $\mathrm{Log}(1+z)$ étant valable pour $|z|<1$, celui de $\mathrm{Log}(1+\frac{z}{4})$ est valable pour $|z/4|<1$ soit $|z|<4$.

8. $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi z)^{2n+1} = \sin(\pi z)$ (cf. définition de sin dans le cours). En dérivant l'égalité précédente, on a, pour tous $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}(2n+1)z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n)!} z^{2n} = \pi\cos(\pi z)$ (il y avait donc 2 cases à cocher pour $f'(z)$).

9. Le trinôme du second degré $z^2 - \sqrt{2}z + 1$ se factorise en $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = (z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}) = (z - e^{i\pi/4})(z - e^{-i\pi/4})$.
En décomposant en éléments simples, on obtient $g(z) = \dfrac{1}{(z - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}})(z - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})} = \dfrac{i}{\sqrt{2}z - 1 + i} - \dfrac{i}{\sqrt{2}z - 1 - i}$.
La fonction g est une fraction rationnelle dont le dénominateur s'annule en $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$ et $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}$ donc $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{e^{i\pi/4}, e^{-i\pi/4}\})$.
On développe en série entière la décomposition obtenue précédemment puis on remet les deux développements sous le même signe somme :

$$g(z) = \frac{i}{\sqrt{2}z-1+i} - \frac{i}{\sqrt{2}z-1-i} = \frac{-i}{1-i}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}z}{1-i}} + \frac{i}{1+i}\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}z}{1+i}} = \frac{-i}{1-i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}z}{1-i}\right)^n + \frac{i}{1+i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\sqrt{2}z}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} i(\sqrt{2})^n\left(\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}}\right)z^n,$$

ce qui fait une première case à cocher. Enfin, en remarquant que $i(\sqrt{2})^n(\frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{(1-i)^{n+1}}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{n+1}} - \frac{1}{(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^{n+1}}\right) = \sqrt{2}\frac{e^{i\pi(n+1)/4} - e^{-i\pi(n+1)/4}}{2i} = \sqrt{2}\sin(\frac{(n+1)\pi}{4})$, on a aussi $g(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{2}\sin(\frac{(n+1)\pi}{4})z^n$, ce qui faisait une dernière case à cocher.