INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2025-2026
3GMA FISA

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Lundi 3 novembre 2025 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\dfrac{e^{it}}{t} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{(1+t^2)^{1/4}} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(t)}{t^2} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\sin(t)-t}{t^{7/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[)$

☐ $\dfrac{e^{it}}{t} \in \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{1}{(1+t^2)^{1/4}} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\dfrac{\ln(t)}{t^2} \in \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ ☐ $\dfrac{\sin(t)-t}{t^{7/2}} \in \mathrm{L}^2(]0,1[)$

2. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit l'intégrale à paramètre $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{x} e^{-x} dx$. Alors

$F'(t) =$ ☐ $t \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{x} e^{-x} dx$ ☐ $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-x} dx$ ☐ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-x} dx$ ☐ n'existe pas

soit encore $F'(t) =$ ☐ $\dfrac{1}{1-t^2}$ ☐ $-\dfrac{1}{1+t^2}$ ☐ $\dfrac{1}{1+t^2}$ ☐ $\dfrac{it}{1+t^2}$ ☐ n'existe pas

On en déduit $F(t) =$ ☐ $\dfrac{1}{2}\ln(1-t^2)$ ☐ $-\arctan(t)$ ☐ $\arctan(t)$ ☐ $\dfrac{i}{2}\ln(1+t^2)$ ☐ $\dfrac{\sin(t)}{t}$

3. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ vaut

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ $-\pi$ ☐ π ☐ -2π ☐ 2π ☐ 4π ☐ 6π ☐ $+\infty$

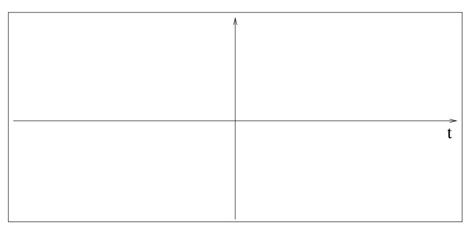
4. La transformée de Fourier de $t\,e^{-t^2/2}$ vaut

☐ n'existe pas ☐ $(2\pi)^{3/2}\xi e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $-i(2\pi)^{3/2}\xi e^{-2\pi^2\xi^2}$

☐ $-i(2\pi)^{3/2} e^{-2\pi^2\xi^2}$ ☐ $-i\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/2} \xi e^{-\pi^2\xi^2/2}$ ☐ $i\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{3/2} \xi e^{-\pi^2\xi^2/2}$

5. Soit $f(t) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}]}(t) - \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(t)$, (on rappelle que $\mathbf{1}_A(t)$ est la fonction caractéristique de l'ensemble A qui vaut 1 si $t \in A$ et 0 si $t \notin A$).

Tracer l'allure de la fonction f dans le cadre ci-contre :

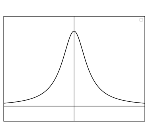
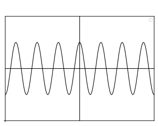
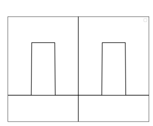
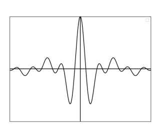
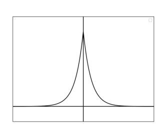


La transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ de f vaut

☐ n'existe pas ☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\cos(\dfrac{\xi}{2})\sin(\dfrac{3\xi}{2})$ ☐ $\dfrac{1}{\pi}(2\sin(2\xi) - \sin(\xi))$

☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\sin(\dfrac{\xi}{2})\cos(\dfrac{3\xi}{2})$ ☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\sin(\dfrac{\xi}{2})\sin(\dfrac{3\xi}{2})$ ☐ $\dfrac{2}{\pi\xi}\cos(\dfrac{\xi}{2})\cos(\dfrac{3\xi}{2})$

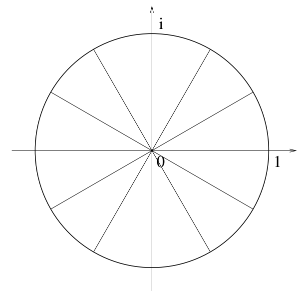
Quelle est l'allure de $\widehat{f}(\xi)$? ☐ elle n'existe pas

☐  ☐  ☐  ☐  ☐ 

Analyse complexe

6. On considère le logarithme complexe principal $\mathrm{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ (le plan complexe fendu privé du demi-axe des réels négatifs) en choisissant l'Argument principal de z dans $]-\pi, \pi[$.
Pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, on définit $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

Positionner les z_k sur le dessin ci-contre :



Cocher les assertions correctes

☐ $z_k^5 = 1$ ☐ $z_k^6 = 1$ ☐ $z_k^8 = 1$ ☐ $z_k^{12} = 1$

☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} z_k = -1$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} z_k = 0$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} z_k = 1$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} z_k = \sum_{k=0}^{5} \overline{z}_k$

☐ $\mathrm{Log}(z_5) = i\frac{10\pi}{6}$ ☐ $\mathrm{Log}(z_5) = -i\frac{2\pi}{6}$ ☐ $z_4^{1/2} = e^{i\frac{4\pi}{6}}$ ☐ $z_4^{1/2} = e^{-i\frac{2\pi}{6}}$

7. Soit $h(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{n}$.

Le rayon de convergence R de la série entière h est

$R =$ ☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $+\infty$

Le calcul de la somme donne

$h(z) =$ ☐ $\dfrac{2z}{(1-z^2)^2}$ ☐ 0 ☐ $\mathrm{Log}(1-z^2)$ ☐ $-\mathrm{Log}(1-z^2)$ ☐ $\mathrm{Log}(1+z^2)$ ☐ $\dfrac{1}{1-z^2}$

8. Soit $f(z) = \dfrac{z+1}{z+3}$. Alors

☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{3\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-3\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ ☐ $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{3, -1\})$

Le développement en série entière de f en $z = 0$ s'écrit

☐ n'existe pas ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} z^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n}}{3^{n+1}} z^n$

☐ $\displaystyle\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} z^n$ ☐ $\displaystyle\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n}} z^n$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n}} z^n$

avec un rayon de convergence

$R =$ ☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\frac{1}{3}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ $+\infty$

Correction du DS de novembre 2025 – 3GMA FISA "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\left|\frac{e^{it}}{t}\right| = \frac{1}{t} \in \mathrm{L}^2([1,+\infty[) \setminus \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ donc $\frac{e^{it}}{t}$ est dans $\mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ mais pas dans $\mathrm{L}^1([1,+\infty[)$.

$\frac{1}{(1+t^2)^{1/4}}$ est continue, positive et paire sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Mais $\frac{1}{(1+t^2)^{1/4}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et cette dernière fonction n'est ni intégrable, ni de carré intégrable en $+\infty$. Donc $\frac{1}{(1+t^2)^{1/4}}$ n'est ni dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ni dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

$\frac{\ln(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$, il suffit d'étudier l'intégrabilité en $+\infty$. Comme $t^{3/2}\frac{\ln(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissance comparées, on obtient que, pour $t \geq 1$ assez grand, $0 \leq \frac{\ln(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[) \cap \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$. Il suit $\frac{\ln(t)}{t^2} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[) \cap \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$.

$\left|\frac{\sin(t)-t}{t^{7/2}}\right|$ est continue sur $]0,1]$. En effectuant un développement limité de $\sin(t)$ en 0, on obtient $\left|\frac{\sin(t)-t}{t^{7/2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,1[) \setminus \mathrm{L}^2(]0,1[)$. D'où $\left|\frac{\sin(t)-t}{t^{7/2}}\right| \in \mathrm{L}^1(]0,1[) \setminus \mathrm{L}^2(]0,1[)$.

2. La fonction F est une intégrale à paramètre $F(t) = \int_0^{+\infty} f(t,x)dx$ avec $f(t,x) = \frac{\sin(xt)}{x}e^{-x}$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral (exercice : les hypothèses sont satisfaites), on obtient : $F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-x}dx$ (1ère case à cocher).

La valeur de cette intégrale est la partie réelle de $\int_0^{+\infty} e^{(it-1)x}dx = \frac{1}{1-it} = \frac{1+it}{1+t^2}$, soit $F'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ (2ème case à cocher).
En intégrant la valeur de $F'(t)$ obtenue ci-dessus, on trouve $F(t) = F(0) + \arctan(t)$. Mais $F(0) = 0$ de façon évidente donc $F(t) = \arctan(t)$ (3ème case à cocher).

3. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r}{(1+r^2)^2}dr = 2\pi\left[-\frac{1}{2}(1+r^2)^{-1}\right]_0^{+\infty} = \pi.$

4. On a $\widehat{te^{-t^2/2}} = \frac{1}{-2\pi i}\widehat{e^{-t^2/2}}'(\xi)$. Or $\widehat{e^{-t^2/2}} = \sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\xi^2}$ et donc $\widehat{e^{-t^2/2}}' = -4\pi^2\xi\sqrt{2\pi}e^{-2\pi^2\xi^2}$. Finalement $\widehat{te^{-t^2/2}} = -i(2\pi)^{3/2}\xi\, e^{-2\pi^2\xi^2}$.

5. L'allure de la fonction f est celle de 2 créneaux symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (cf. Figure du milieu sur la dernière ligne).
D'après le formulaire sur les transformées de Fourier et le formulaire trigonométrique,
$\widehat{f}(\xi) = \widehat{\mathbf{1}_{[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}]}}(\xi) - \widehat{\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}}(\xi) = \frac{2}{\pi}\mathrm{sinc}(2\xi) - \frac{1}{\pi}\mathrm{sinc}(\xi) = \frac{1}{\pi\xi}(\sin(2\xi) - \sin(\xi)) = \frac{2}{\pi\xi}\sin(\frac{\xi}{2})\cos(\frac{3\xi}{2})$.
L'allure de $\hat{f}$ est celle de l'avant-dernière figure.

6. Les z_k sont les racines 6-èmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des solutions de $z^6 = 1$. On a donc $z_k^6 = 1$ et $z_k^{12} = (z_k^6)^2 = 1$ (2 cases à cocher). La somme des racines est nulle : $\sum_{k=0}^{5} z_k = \sum_{k=0}^{5}(e^{i\frac{2\pi}{6}})^k = \sum_{k=0}^{5} z_1^k = \frac{1-z_1^6}{1-z_1} = 0$ (1 case à cocher). Comme $z_0 = 1 = \overline{z}_0$, $z_1 = \overline{z}_5$, $z_2 = \overline{z}_4$ et $z_3 = -1 = \overline{z}_3$, on trouve $\sum_{k=0}^{5}\overline{z}_k = \sum_{k=0}^{5} z_k = 0$ (1 case à cocher). En remarquant que $\mathrm{Arg}(z_4) = \mathrm{Arg}(e^{i\frac{8\pi}{6}}) = -\frac{4\pi}{6}$ et $\mathrm{Arg}(z_5) = \mathrm{Arg}(e^{i\frac{10\pi}{6}}) = -\frac{2\pi}{6}$ (Arg dénotant l'argument principal dans $[-\pi,\pi[$), on trouve facilement $\mathrm{Log}(z_5) = -i\frac{2\pi}{6}$ et $z_4^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z_4)} = e^{-i\frac{2\pi}{6}}$.

7. D'après le critère de d'Alembert, on trouve facilement que le rayon de convergence de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{Z^n}{n}$ est 1. Donc, en posant $Z = z^2$, on a que cette série converge absolument si $|Z| = |z|^2 < 1$, c'est-à-dire si $|z| < 1$, et diverge grossièrement si $|Z| = |z|^2 > 1$, c'est-à-dire quand $|z| > 1$. Par le lemme d'Abel, on a donc que le rayon de convergence de h est $R = 1$. Puis, pour tout $z \in D(0,1)$, on a :
$h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{2n}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-z^2)^n = -\mathrm{Log}(1-z^2)$.

8. $f(z) = \frac{z+1}{z+3}$ est une fraction rationnelle, elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$ privé de l'ensemble des points où $z+3$ s'annule, c'est-à-dire que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\setminus\{-3\})$. En particulier, f est holomorphe en $z = 0$ et développable en série entière en ce point :
$f(z) = \frac{z+1}{z+3} = (z+1)\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = (z+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}z^n$. Enfin le rayon de convergence de la série obtenue est $R = 3$: on peut le voir avec le critère de d'Alembert où comme le rayon du plus grand disque centré en 0 et contenu dans $\mathbb{C}\setminus\{-3\}$.