INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025

2ème année - 1er cycle - STPI

Analyse 3 - Bimestre 1

Solutions des exercices à travailler en autonomie

Exercice 1 *2.* $\frac{\cos(x)}{(1+2x)} = 1 - 2x + \frac{7}{2}x^2 - 7x^3 + o(x^3)$

$(1+x^2)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)$

$\ln(\cos(2x)) = -2x^2 + o(x^3)$

3. $\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + o(x-2)^2$

Exercice 2 (a) $f(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$

(b) $f(x) = \frac{x^2\ln(x)+x}{x^4+\ln(x)} \sim_{+\infty} \ln(x)x^{-2}$

(c) $f(x) = 1 + x^3\ln(x) \sim_{+\infty} x^3\ln(x)$

Exercice 3 $f(x) = (\sin x)^{3/2} \sim_0 x^{3/2}$

$g(x) = \frac{1+\ln(x)}{x^2} \sim_0 \ln(x)x^{-2}$

$h(x) = \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\ln(x)} \sim_0 x^{-\frac{1}{2}}\ln(x)^{-1}$

Exercice 4 *1.* $\sqrt{1+x+x^2} + x \sim_0 1, \qquad \sim_1 \sqrt{3}+1, \qquad \sim_{+\infty} 2x.$

2. $\sqrt{1+x+x^2} - x \sim_0 1, \qquad \sim_{+\infty} \frac{1}{2}.$

3. $\ln^2(x) + \ln(x) \sim_0 \ln^2(x), \qquad \sim_1 \ln(x), \qquad \sim_{+\infty} \ln^2(x).$

4. $\frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)} \sim_0 -9/8.$

5. $\frac{1-e^x\sin(x)}{x^2+x^3} \sim_0 \frac{1}{x^2}.$

Exercice 5 $\int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx, = \sin(e) - \sin(1)$

$\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,dx, = 1 - \frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\pi/2} \cos^4(x)\,dx = \frac{3\pi}{16}$

$\int x^2\,\ln(x)\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9}$

$\int \sin^3(x)\cos^9(x)\,dx = \frac{\cos^{12}(x)}{12} - \frac{\cos^{10}(x)}{10}$

Exercice 6 $\int_0^1 \frac{2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{4}(\pi + \ln(64))$

Exercice 7 *1.* $\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{e^t+t^2+2}\,dt$ *CV car* $t^2 \cdot \frac{t^2+1}{e^t+t^2+2} \underset{+\infty}{\sim} t^4e^{-t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$

2. $\int_0^1 \ln(t)\,dt$ *CV (exemple fait dans le cours)*

3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t+1}\,dt$ *CV en* 0 *car* $\frac{\ln(t)}{e^t+1} \sim_0 \frac{\ln(t)}{2}$ *qui est de signe constant (négatif) sur un voisinage de* 0^+ *et dont l'intégrale CV en* 0. *CV également en* $+\infty$ *car* $t^2\frac{\ln(t)}{e^t+1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$.

4. *Sur* $]0,1[$, $\frac{1}{\sqrt{t^3-2t^2+t}} = \frac{1}{\sqrt{t}(1-t)}$ *qui est équivalent en* 0 *à* $\frac{1}{\sqrt{t}}$ *dont l'intégrale converge en* 0 *par Riemann et qui est équivalent en* 1 *à* $\frac{1}{1-t}$ *dont l'intégrale diverge en* 1 *par Riemann également (et changement de variable).*

5. $\int_0^1 \frac{1}{\cos(t)-1}$ *DV car* $\frac{1}{\cos(t)-1} \sim_0 \frac{-2}{t^2}$ *dont l'intégrale diverge en* 0 *par Riemann (pas de pb en 1).*

6. $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t^2+1}\,dt$ *CV en* $+\infty$ *car* $t^2\frac{te^{-t}}{t^2+1} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ *(pas de pb en 0).*

7. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx$ *CV en* 0 *car équivalent en* 0 *à* $\frac{1}{\sqrt{x}}$ *dont l'intégrale est convergente en* 0 *par Riemann. CV aussi en* $+\infty$ *car* $|\frac{\sin(x)}{x^{3/2}}| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ *dont l'intégrale est convergente en* $+\infty$ *par Riemann.*

8. $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)\,dt$ *DV car* $\sqrt{t+1}-\sqrt{t} \sim_{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}}$ *dont l'intégrale est divergente en* $+\infty$.

9. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,dt$ *CV car* $\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t}} \sim_{+\infty} \frac{-1}{2t^{3/2}}$ *qui est de signe constant (négatif) au voisinage de* $+\infty$ *et dont l'intégrale est divergente en* $+\infty$.

10. $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ *CV car* $x^2 \cdot xe^{-x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$

11. $\int_X^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx = [\ln(-\ln(x))]_X^{1/2} \underset{X\to 0}{\to} -\infty$. *Donc* $\int_0^{1/2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ *DV en* 0. *Avec la même technique, on montre que* $\int_{1/2}^1 \frac{1}{x\ln x}\,dx$ *DV en* 1 *également.*

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$ *DV en* $+\infty$ *car* $\frac{\arctan(x)}{x} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x}$ *dont l'intégrale est divergente en* $+\infty$ *par Riemann.*

Exercice 8 1. $\int_X^1 \ln(x)\,dx = [x\ln(x)-x]_X^1 = -1-X\ln(X)-X \underset{X\to 0}{\to} -1$. *Donc* $\int_X^1 \ln(x)\,dx = -1$.

2. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \frac{\ln(2)+1}{2}$ *(i.p.p.)*

3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x} = \ln(2)$ *(décomposition en éléments simples)*

4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x} = \frac{\ln(2)}{2}$ *(décomposition en éléments simples)*

5. * $I_n = \int_0^1 \ln(x)^n\,dx = (-1)^n n!$ *(après l'i.p.p., on trouve* $I_n = -nI_{n-1}$ *et comme* $I_0 = 1$, *cela donne le résultat).*

Exercice 9 1. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^\alpha}$ *DV pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(car par Riemann, l'intégrale CV en 3 ssi* $\alpha < 1$ *et elle CV en* $+\infty$ *ssi* $\alpha > 1$.*)*

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{\beta t}\,dt$ *CV ssi* $\beta < 0$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan(t)}{t^\gamma}\,dt$ *CV en* $+\infty$ *ssi* $\gamma > 1$ *par Riemann et CV en* 0 *ssi* $\gamma < 2$ *(car* $\frac{arctan(t)}{t^\gamma} \sim_0 \frac{1}{t^{\gamma-1}}$*).*

Exercice 10

$$\frac{1+n}{n^3\ln(n^2)} \sim 1/2n^{-2}(\ln(n))^{-1}, \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim_0 n^{-1}, \quad \frac{n^2+\sqrt{n}}{\ln(n)} \sim_0 n^2(\ln(n))^{-1}.$$

Exercice 11 *1.* $S_n := \sum_{k=1}^n a^k = a\frac{1-a^n}{1-a}$ *CV vers* $\frac{a}{1-a}$ *ssi* $|a| < 1$.

2. $S_n := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0$ *CV vers* $l - x_0$ *ssi* $x_n \to l$.

3. $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{3k+2}{2k+3k^2+k^3} \to 2$.

Exercice 12 *1.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$ *CV car* $\frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-1/n}$ *DV car* $e^{-1/n} \to 1$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}$ *CVA donc CV*

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right)$ *CV car* $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim \frac{-1}{2n^2}$.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}}$ *DV car* $\frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}} \sim \frac{1}{n}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{(n-1)!}$ *CV car* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{10}{n} \to 0 < 1$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n})}$ *CV par le critère des séries alternées*

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ *CV car* $\tan\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ *DV car* $(-1)^n$ *ne tend pas vers* 0 *quand* $n \to \infty$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2+n)^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}}$ *CV car* $\frac{1}{(2+n)^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}} \sim \frac{-2}{3n^{4/3}}$.

Exercice 13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3+a^n}{2^n}$ *CV pour* $a \in [0, 2[$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 b^n} \text{ CV pour } b \geq 1.$$

Exercice 14 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n} = \frac{1}{1-1/\pi}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1$$

Exercice 15 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) z^n,\ R=1$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}},\ R=1$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+4^n},\ R=4$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} z^n,\ R=2$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2+2^n}\, z^n,\ R=2/3$
6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} z^n,\ R=1$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n,\ R=1$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) z^n,\ R=1$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n+5^n)\, z^n,\ R=1/5$

Exercice 16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ *CV pour* $x \in]-1,1]$.

Exercice 17 $a_n = 2^n((n+1)!)^2 a_0$

Exercice 18 1. $A = 2 \times 4 \times 6 \times 8 = 2^4 \times 4!$, $B = \frac{1}{3\times5\times7\times9\times11\times13\times15\times17} = \frac{2^8\times8!}{17!}$.

2. *Soit* $(a_n)_{n\geq1}$ *vérifiant :* $\forall k \geq 1,\ a_{k+2} = k a_k$.
   $a_{2n} = 2^{n-1}(n-1)! a_2$
   $a_{2n+1} = \frac{(2n)!}{2^n n!} a_1$

Exercice 19 *Soit* $(a_n)_{n\geq1}$ *définie par :*

$$a_n = (6n-3) \times (6n-6) \times (6n-9) \times \cdots \times 3.$$

1. $a_n = \prod_{k=1}^{2n-1} 3k$.
2. $a_n = 3^{2n-1}(2n-1)!$

Exercice 20 *1.* $y''-xy'-y=0$ *avec* $y(0)=1$ *et* $y'(0)=0$*. Posons* $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$*. Si* y *solution alors on a* $a_0=1$ *et* $a_1=0$*. On a aussi* $\forall n\geq 0$, $(n+2)a_{n+2}=a_n$*. Donc* $\forall k\geq 0$, $a_{2k}=\frac{1}{2^kk!}a_0=\frac{1}{2^kk!}$*. Donc* $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^kk!}x^{2k}=e^{x^2/2}$*.*

2. $xy''+y'+xy=0$ *avec* $y(0)=1$*. Posons* $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$*. Si* y *solution alors on a* $a_0=1$*. On a aussi*

$$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2a_n+a_{n-2}\right)x^{n-1}=0$$

Donc $a_1=0$ *et* $\forall n\geq 2$, $n^2a_n+a_{n-2}=0$*. Donc* $\forall k\geq 0$, $a_{2k}=\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}$*. Donc* $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}x^{2k}$*.*

Exercice 21 *On considère la série entière :* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-n+1}{n!}z^n$*.*

1. $R=+\infty$*.*
2. $P(X)=X^2-X+1=1\cdot X(X-1)+1$*. Donc*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)}{n!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n=z^2e^z+e^z$$

Exercice 22 $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+3}=-\dfrac{1}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}}{3^n}-\frac{(-1)^n2^n}{3^{n+1}}\right)x^n$*, pour* $x\in]-3/2,3/2[$*.*

Exercice 23

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p(2\pi)^{2p}}{(2p)!}=0,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n4^n}{n!}=e^{-4},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln(2),\quad {}^*\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=2$$

Exercice 24 *1.*

2. $a_n=0$ *et* $b_n=\frac{12(-1)^{n+1}}{(n\pi)^3}$*.*
3. f *est de classe* C^1*. Donc par le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de* f *est convergente et on a même* $S(f)=f$
4. $\frac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(t-t^3)^2dt=\frac{8}{105}$,

   $\displaystyle\sum_{n\geq 1}b_n^2=72\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n\pi)^6}$,

   Donc par Parseval, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945}$*.*

Exercice 25 *1. Pour* $t\in]-2\pi,0[$*, on a par périodicité,* $f(t)=f(t+2\pi)$*. Comme* $t+2\pi\in]0,2\pi[$*, on a par définition de* f *que* $f(t+2\pi)=(t+2\pi-\pi)^2=(t+\pi)^2=(-t-\pi)^2=f(-t)$ *car* $-t\in]0,2\pi[$*. On a donc bien* $f(t)=f(-t)$ *pour* $t\in]-2\pi,0[$*.*

Par un raisonnement analogue, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = f(-t)$. f est donc paire et donc $\forall n \geq 1,\ b_n = 0$.

2. *Par Dirichlet en $t = \pi$, on a :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

3. *Par Parseval :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 26 $b_n = \frac{8}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{4n} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{4n+1} + \frac{1}{4}\frac{(-1)^n\sqrt{2}-2}{4n-1}\right)$

Exercice 27 *c.f. exercice 25 pour les solutions numériques.*

Exercice 28 *Soit f la fonction 4-périodique telle que* $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{2} & si \quad -2 \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{t}{2} & si \quad 0 \leq t < 2. \end{cases}$

1.
2. *f est continue et f est C^1 par morceaux. Donc f est égale à sa série de Fourier.*
3. $S(f)(t) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{p\geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\left(\frac{(2p+1)\pi t}{2}\right)$.
4. (a) *Dirichlet en $t = 0$ donne :* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

   (b) *Parseval donne :* $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

Exercice 29 1. *f est paire et $f(t + \frac{\pi}{2}) = |\sin(2t + \pi)| = |-\sin(2t)| = f(t)$. Donc f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$.*

2. $a_0 = \frac{4}{\pi}$, *pour tout $n \geq 1$, $a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$ et $b_n = 0$.*

   Comme f est C^1, d'après Dirichlet, $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = S(f)(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(4nt)}{4n^2 - 1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}$.

Exercice 30 1. $(a_n, b_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2+2n\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\right)$

2. $(c_n, d_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi/2+2n\pi}}, \frac{1}{\sqrt{(2n+1)\pi}}\right)$
3. *Donc $f(x, y)$ n'a pas de limite quand $(x, y) \to (0, 0)$?*

Exercice 31 *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on pose $f(x, y) = \frac{x+y^2}{x^2+y}$.*

1. $(a_n, b_n) = (0, 1/n)$

2. $(c_n, d_n) = (1/n, 0)$

3. $f(x,y)$ *n'a donc pas de limite quand* $(x,y) \to (0,0)$ *?*

Exercice 32 *Posons* $r = \sqrt{x^2+y^2}$*. Pour* $(x,y) \neq (0,0)$*,* $|f(x,y)| \leq \frac{2r^3}{r^2} = 2r \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$*. Donc* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$*.*

Exercice 33 *1.* f *est définie lorsque* $1+xy > 0$*, c'est à dire si* ($x > 0$ *et* $y > -\frac{1}{x}$) *ou* ($x < 0$ *et* $y < -\frac{1}{x}$) *ou* $x = 0$*.*

2. f *n'est pas continue en* $(0,0)$ *car* $f(x,x) = \frac{\ln(1+x^2)}{2x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ *et* $f(x,0) = 0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

Exercice 34 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y - 4$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 3x + 2$*.*

Exercice 35 *Si* $f(t,u,v) = u^3 + \sin(vt)$*, alors* $\frac{\partial f}{\partial t} = v\cos(vt)$*,* $\frac{\partial f}{\partial u} = 3u^2$*, et* $\frac{\partial f}{\partial v} = t\cos(vt)$*.*

$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} = 0$*.*

Exercice 36 $z = (2\ln(2)+1)x + \frac{1}{2}y - \ln(2) - 2$*.*

Exercice 37 *1. Il faut* $y > x$ *et* $y > -x^2$ *et* $y \neq x+1$*..*

2. La ligne de niveau 2 *de* f *est l'ensemble* $y = 0$ *ou* $y = 2x+1$*.*

3. $z = e^{-1}\cdot(x-0) + 0\cdot(y-e) + 1 = e^{-1}x + 1$*.*

Exercice 38 $F'(t) = e^t \ln^2(2t) + 2\frac{e^t \ln(2t)}{t}$ *et* $F''(t) = e^t\left(\ln^2(2t) + 4\frac{\ln(2t)}{t} + \frac{2}{t^2} - 2\frac{\ln(2t)}{t^2}\right)$*.*

Exercice 39 $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^{x+2y}\cdot\big((x^2-y)^2 + 4x(x^2-y)\big)$ *et* $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = e^{x+2y}\cdot\big(2(x^2-y)^2 - 2(x^2-y)\big)$

Exercice 40 $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 2ue^{u^2+v}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(e^{u^2+v}, \sin(uv^2)) + v^2\cos(uv^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(e^{u^2+v}, \sin(uv^2))$ *et*

$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = e^{u^2+v}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(e^{u^2+v}, \sin(uv^2)) + 2uv\cos(uv^2)\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(e^{u^2+v}, \sin(uv^2))$*.*

Exercice 41

1. $\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ *et* $\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$*.*

2.
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2 \iff f(x,y) = x + y + h(x-y)$$

avec $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable quelconque.*

Exercice 42 *En utilisant le changement de variable :* $u = x + y$ *et* $v = 3x + y$ *et en posant* $f(x,y) = F(u,v)$*, on a :*

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 &\iff -4\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u,v) = 0 \\ &\iff F(u,v) = h(u) + g(v) \\ &\iff f(x,y) = h(x+y) + g(3x+y)\end{aligned}$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont deux fonctions dérivables quelconques.*

Exercice 43 $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ *a un minimum local au point* $(1,1)$.

Exercice 44 *Les points critiques de* f *sont* $(0,0)$ *(col) et* $(1,1)$ *(minimum local).*

Exercice 45 *Les points critiques de* f *sont* $(0,0)$ *(minimum local) et* $(0,2)$ *(minimum local).*

Exercice 46

1. *Tous les points de la droite* $\mathcal{D} : y = x$ *sont des points critiques. Mais on ne peut pas connaitre leur nature à l'aide de la matrice Hessienne (car son déterminant est nul).*
2. *Mais pour tout* $(x,x) \in \mathcal{D}$*, on a* $h(x,x) = 2$*. Or* $h(x,y) = (x-y)^2 + 2 \geq 2$*. Donc les points critiques de* h *sont des minimums globaux.*

Exercice 47 *Les minima de* f *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$ *sont les points de coordonnées* $(1,1)$*,* $(1,-1)$*,* $(-1,1)$*,* $(-1,-1)$.

Exercice 48 *Les maxima de* f *sous la contrainte* $h(x,y) = 0$ *sont les points de coordonnées* $(1,1)$*,* $(1,-1)$*,* $(-1,1)$*,* $(-1,-1)$.