INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
2ème année - 1er cycle - STPI
Analyse 3 - Bimestre 1

Exercices en autonomie du bimestre 1

EXERCICES DE REVISION.

Exercice 1 1. *Donner les DL en* 0 *à l'ordre* 4 *des fonctions classiques suivantes :*

$$\frac{1}{1-x}, \quad \ln(1+x), \quad \sin(x), \quad \cos(x), \quad e^x, \quad \tan(x), \quad Arctan(x), \quad \sqrt{1+x}, \quad arcos(x)$$

2. *Déterminer les DL à l'ordre 3 en* 0 *des fonctions suivantes :*

$$\frac{\cos(x)}{(1+2x)}, \quad (1+x^2)^{1/3}, \quad \ln(\cos(2x))$$

3. *Déterminer le DL à l'ordre 2 en* $x=2$ *de la fonction suivante :*

$$\frac{x+1}{x^2+x}.$$

Exercice 2 *Pour les fonctions suivantes, donner un équivalent en* $+\infty$ *de la forme* $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$ *(avec* $C,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*) :*

$$(a)\quad f(x)=\sin\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (b)\quad f(x)=\frac{x^2\ln(x)+x}{x^4+\ln(x)}, \quad (c)\quad f(x)=1+x^3\ln(x).$$

Exercice 3 *Pour les fonctions suivantes, donner un équivalent en* 0 *(ou en* 0_+ *si problème de définition pour* $x<0$*) de la forme* $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$ *avec* $C,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ *:*

$$f(x)=(\sin x)^{3/2}, \quad g(x)=\frac{1+\ln(x)}{x^2}, \quad h(x)=\frac{x^2+\sqrt{x}}{x\ln(x)}.$$

Exercice 4 *Donner un équivalent de la forme* $Cx^\alpha(\ln x)^\beta$ *(avec* $C,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$*) :*

1. $\sqrt{1+x+x^2}+x$ *en* $x=0$*, en* $x=1$ *et en* $x=+\infty$.
2. $\sqrt{1+x+x^2}-x$ *en* $x=0$ *et en* $x=+\infty$.
3. $\ln^2(x)+\ln(x)$ *en* $x=0$*, en* $x=1$ *et en* $x=+\infty$.
4. $\frac{\ln(\cos(3x))}{\sin^2(2x)}$ *en* $x=0$.
5. $\frac{1-e^x\sin(x)}{x^2+x^3}$ *en* $x=0$.

Exercice 5 *Calculer les intégrales, ou les primitives suivantes :*

$$\int_0^1 e^x\cos(e^x)\,dx, \int_0^{\pi/4}\tan^2(x)\,dx, \int_0^{\pi/2}\cos^4(x)\,dx, \int x^2\,\ln(x)\,dx, \int\sin^3(x)\cos^9(x)\,dx.$$

Exercice 6 *En utilisant une décomposition en éléments simples, calculer l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{2x^2+2x+2}{x^3+x^2+x+1}.$$

EXERCICES CHAPITRE 1 : Intégrales généralisées.

Exercice 7 *Etudier la convergence des intégrales suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{e^t+t^2+2}\,dt, \quad \int_0^1 \ln(t)\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t+1}\,dt \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3-2t^2+t}}\,dt, \quad \int_0^1 \frac{1}{\cos(t)-1}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{t^2+1}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^{3/2}}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{t+1}-\sqrt{t}\right)\,dt, \quad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\,dt$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{x\ln x}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x}\,dx$$

Exercice 8 *Montrer la convergence puis calculer chacune des intégrales suivantes :*

1. $\int_0^1 \ln(x)\,dx$.
2. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$
3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$ *(indication : décomposition en éléments simples)*
4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x}$ *(indication : décomposition en éléments simples)*
5. * $I_n = \int_0^1 \ln(x)^n\,dx$ *(indication : pour le calcul, on pourra faire une i.p.p. afin de trouver une relation entre* I_n *et* I_{n-1}*).*

Exercice 9 *Déterminer les valeurs des paramétres* α, β, γ *pour lesquelles les intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-3)^\alpha}, \quad \int_1^{+\infty} e^{\beta t}\,dt, \quad \int_0^{+\infty} \frac{arctan(t)}{t^\gamma}\,dt$$

EXERCICES CHAPITRE 2 : Séries numériques.

Exercice 10 *Pour les suites ci-dessous, donner un équivalent quand* $n \to +\infty$ *de la forme* $Cn^\alpha(\ln n)^\beta$*, avec* $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *:*

$$\frac{1+n}{n^3\ln(n^2)}, \quad \ln\left(\frac{n+1}{n}\right), \quad \frac{n^2+\sqrt{n}}{\ln(n)}.$$

Exercice 11 *Calculer en fonction de* n *les sommes* S_n *suivantes, et conclure si la suite* $(S_n)_n$ *converge ou non (éventuellement en fonction des données présentes dans la somme).*

1. $S_n := \sum_{k=1}^{n} a^k$.

2. $S_n := \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$, *où* $(x_k)_{k\geq 0}$ *est une suite réelle.*

3. $S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{3k+2}{2k+3k^2+k^3}$.

Indication : utiliser la décomposition en éléments simples : $\frac{3k+2}{2k+3k^2+k^3} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2}$.

Exercice 12 *Etudier la convergence des séries numériques suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-1/n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{\pi/2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right), \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+\sin(n)+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{(n-1)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n})}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2+n)^{1/3}} - \frac{1}{n^{1/3}}$$

Exercice 13 *Déterminer les valeurs des paramétres* $a \in [0, +\infty[, b \in [0, +\infty[, c$ *pour lesquelles les séries suivantes sont convergentes :*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3 + a^n}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2 b^n}$$

Exercice 14 *Pour chacune des séries suivantes, montrer la convergence puis calculer la somme :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\pi^n} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

EXERCICES CHAPITRE 3 : Séries entières.

Exercice 15 *Calculer le rayon de convergence des série entières suivantes :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(n) z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n+4^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n+1} z^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2+2^n} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!\, e^n}{n^n} z^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) z^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 5^n)\, z^n$$

Exercice 16 *Déterminer les valeurs de* $x \in \mathbb{R}$ *pour lesquelles la série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} x^n$ *est convergente. Indication : On commençera par calculer le rayon de convergence puis dans un second temps, on étudiera la convergence de la série numérique en chaque point du bord de l'intervalle de convergence.*

Exercice 17 *Soit* $(a_n)_{n\geq 0}$ *vérifiant :* $\forall k \geq 1,\ a_k = 2\,(k+1)^2 a_{k-1}$. *Calculer* a_n *en fonction de* n *et* a_0 *(le résultat doit être exprimé avec puissance et factorielle).*

Indication : *écrire* a_n *en fonction de* a_{n-1}, *puis dans cette relation remplacer* a_{n-1} *par la relation donnant* a_{n-1} *en fonction de* a_{n-2}, *itérer... Une fois la formule obtenue de cette façon, on pourra la justifier par récurrence.*

Exercice 18 *1. Exprimer* $A = 2 \times 4 \times 6 \times 8$ *à l'aide d'une formule avec puissances et factorielles. Idem pour* $B = \frac{1}{3\times5\times7\times9\times11\times13\times15\times17}$ *.*

2. *Soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *vérifiant :* $\forall k \geq 1,\ a_{k+2} = ka_k$*. Calculer* a_{2n} *en fonction de* n *et* a_2*, puis* a_{2n+1} *en fonction de* n *et* a_1 *(les résultats doivent être exprimés avec puissances et factorielles). Indication : appliquer la même méthode que dans l'exercice précédent.*

Exercice 19 *Soit* $(a_n)_{n\geq 1}$ *définie par :*

$$a_n = (6n-3)\times(6n-6)\times(6n-9)\times\cdots\times 3.$$

1. *Exprimer* a_n *sous la fome* $a_n = \prod_{k=??}^{??} ??$*.*
2. *Donner* a_n *en fonction de* n *(le résultat doit être exprimé avec puissance et factorielle).*

Exercice 20 *Déterminer une solution développable en série entière des équations différentielles suivantes (on donnera le rayon de convergence de la série obtenue) :*

1. $y'' - xy' - y = 0$ *avec* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$*.*
2. * $xy'' + y' + xy = 0$ *avec* $y(0) = 1$*.*

Exercice 21 *On considère la série entière :* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-n+1}{n!} z^n$*.*

1. *Déterminer le rayon de convergence* R *de cette série entière.*
2. *En écrivant le polynôme* $P(X) = X^2 - X + 1$ *dans la base* $(1, X, X(X-1))$ *de* $\mathbb{R}_2[X]$*, calculer* $f(z)$ *en précisant le domaine de validité de la formule obtenue.*

Exercice 22 *Développer en série entière* $f(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$*, en précisant le domaine de validité de ce développement.*

Exercice 23 *Pour chacune des séries suivantes, montrer la convergence puis calculer la somme (indication : ayez en tête ou notez les développements en série entière des fonctions de référence puis remplacez par la bonne valeur de x)*

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p(2\pi)^{2p}}{(2p)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}, \quad {}^*\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

AUTRES EXERCICES CORRIGES. Vous pouvez encore vous entrainer en vous rendant par exemple aux sites internet suivants :

1. Bibmath > supérieur > Maths Spé
   — > Intégrales impropres et fonctions intégrales : exercices 1,2,3,4,5,6,13,14,15,16,17
   — > Compléments sur les séries : exercices 1,2,3,17,18,19,26,27,28,29,34,35
   — > Séries entières : exercices 1,2,3,6,22,23,24,25,46
2. exo7 > Deuxième année > Exercices de Maths spé de J.L Rouget > Intégration, séries et séries entières

Exercices en autonomie du second bimestre

EXERCICES CHAPITRE 4 : Séries de Fourier.

Exercice 24 *Soit f la fonction périodique, de période 2, définie par $f(t) = t - t^3$ pour $t \in]-1, 1]$.*

1. *Tracer le graphe de f sur $[-3, 3]$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f.*
3. *Étudier la convergence de la série de Fourier de f.*
4. *Que déduire du théorème de Parseval ?*

Exercice 25 *Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = (t - \pi)^2$ pour $t \in [0, 2\pi[$. On admet que ses coefficients de Fourier $(a_n)_{n\geq 0}$ sont donnés par : $a_o = \frac{2\pi^2}{3}$, $\forall n \geq 1,\ a_n = \frac{4}{n^2}$. (Vous pouvez vérifier ces calculs)*

1. *Pour $t \in [-\pi, 0]$, prouver que $f(t) = f(-t)$, et justifier que $\forall n \geq 1,\ b_n = 0$.*
2. *Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ en justifiant votre réponse.*
3. *Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ en justifiant votre réponse.*

Exercice 26 *Soit f la fonction $\frac{\pi}{2}$-périodique et impaire, définie par $f(t) = 1 - \cos(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Calculer les coefficients de Fourier de f.*

Exercice 27 *Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$. On admet que ses coefficients de Fourier sont donnés par : $b_n = 0$, $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$.*

1. *Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ en justifiant votre réponse.*
2. *En utilisant le théorème de Parseval, calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.*

Exercice 28 *Soit f la fonction 4-périodique telle que* $f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{t}{2} & si \quad -2 \leq t \leq 0, \\ 1 - \frac{t}{2} & si \quad 0 \leq t < 2. \end{cases}$

1. *Tracer la fonction f.*
2. *La fonction f est-elle égale à sa série de Fourier ? Justifiez.*
3. *Déterminer la série de Fourier de f qu'on notera $S(f)(t)$.*
4. *Calculer*

(a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$

Exercice 29 *Soit f la fonction définie $f(t) = |\sin(2t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

1. *Préciser la parité de f. Montrer que f est périodique de période $\frac{\pi}{2}$ et représenter f sur $[-\pi, 2\pi]$.*
2. *Calculer les coefficients de Fourier de f et étudier la convergence de la série de Fourier.*
   Indication : *retrouver et utiliser la formule $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cdots)$*
3. *Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.*

EXERCICES CHAPITRE 5 - Fonctions de 2 variables : Limites - Continuité.

Exercice 30 *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$.*

1. *Donner une suite $(a_n, b_n)_n$ telle que $(a_n, b_n) \to (0,0)$ quand $n \to +\infty$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(a_n, b_n) = -1$.*
2. *De même, donner une suite $(c_n, d_n)_n$ telle que $(c_n, d_n) \to (0,0)$ quand $n \to +\infty$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(c_n, d_n) = 1$.*
3. *Que dire de l'existence de la limite de $f(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$?*

Exercice 31 *Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \frac{x+y^2}{x^2+y}$.*

1. *Trouver une suite $(a_n, b_n)_n$ telle que $\lim_n (a_n, b_n) = (0,0)$ et telle que $\lim_n f(a_n, b_n) = 0$.*
2. *Trouver une suite $(c_n, d_n)_n$ telle que $\lim_n (c_n, d_n) = (0,0)$ et telle que $\lim_n f(c_n, d_n) = +\infty$.*
3. *Que dire de l'existence de la limite de $f(x,y)$ quand $(x,y) \to (0,0)$?*

Exercice 32 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 33 *Soit f la fonction définie par* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. *Tracer l'ensemble de définition de f.*
2. *La fonction f est-elle continue sur son ensemble de définition ?*

EXERCICES CHAPITRE 5 - Fonctions de 2 variables : Dérivés partielles.

Exercice 34 *Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de* $f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2 - 4x + 2y$.

Exercice 35 *Soit* $f(t, u, v) = u^3 + \sin(vt)$. *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$, *et* $\frac{\partial f}{\partial v}$. *Vérifier par le calcul que* $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}$.

Exercice 36 *Soit* $f(x, y) = x^2 \ln(xy)$. *Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de* f *au point* $(1, 2)$.

Exercice 37 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $f(x, y) = \frac{\ln(y+x^2)}{\ln(y-x)}$.

1. *Représenter dans un repère cartésien le domaine de définition de* f.
2. *Représenter sur le même graphique la ligne de niveau* 2 *de* f.
3. *Donner l'équation du plan tangent à la surface représentative de* f *au point* $(0, e)$.

Exercice 38 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *défini par* $f(x, y) = xy^2$, *soient* $x(t) = e^t$, $y(t) = \ln(2t)$ *et posons* $F(t) = f(x(t), y(t))$. *Calculer* $F'(t)$ *et* $F''(t)$ *de 2 manières différentes :*

1. *en calculant* $F(t)$ *puis en dérivant par rapport à* t.
2. *en calculant les dérivés partielles premières et secondes de* f *et en utilisant la formule* $F'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x} \cdots$.

Exercice 39 *Soit* $F(x, y) = f(x + 2y, x^2 - y)$ *avec* $f(X, Y) = e^X \cdot Y^2$.

1. *Donner l'expression de* $F(x, y)$ *puis calculer les dérivées partielles* $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ *et* $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$
2. *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial X}(x, y)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial Y}(x, y)$ *puis en utilisant la formule de la dérivée d'une composée, retrouver le résultat de la question 1.*

Exercice 40 *Soit* $(x, y) \mapsto f(x, y)$ *une fonction de classe* $\mathcal{C}^1$ *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$. *Soit* $(u, v) \mapsto g(u, v)$ *la fonction de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}$ *définie par :* $g(u, v) := f(e^{u^2+v}, \sin(uv^2))$. *Calculer les dérivées partielles* $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ *et* $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$ *en fonction des dérivées partielles de* f.

EXERCICES CHAPITRE 5 - Fonctions de 2 variables : Equations aux dérivés partielles.

Exercice 41 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1. *On effectue le changement de variable* $x = \frac{u+v}{2}$ *et* $y = \frac{u-v}{2}$ *de sorte que* $f(x, y) = F(u, v)$.

1. *Exprimer les dérivés partielles de* F *en fonction de celles de* f.
2. *En déduire les solutions de l'EDP :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2.$$

Exercice 42 *En utilisant le changement de variable :* $u = x + y$ *et* $v = 3x + y$*, trouver les solutions* f *de classe* C^2 *de* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 4\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

EXERCICES CHAPITRE 5 - Fonctions de 2 variables : Recherche d'extrema

Exercice 43 *Déterminer les extrema locaux de* $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice 44 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$*. Déterminer les points critiques de* f *et préciser leur nature (col, maximum local ou minimum local).*

Exercice 45 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la fonction définie par* $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$*. Déterminer les points critiques de* f *et préciser leur nature (col, maximum local ou minimum local).*

Exercice 46 *On considère sur* $\mathbb{R}^2$ *la fonction :* $h(x,y) = x^2 + y^2 + 2 - 2xy$.

1. *Déterminer les points critiques de* h *sur* $\mathbb{R}^2$*. A l'aide de la matrice hessienne, que dire de leur nature ?*
2. *Montrer directement que les points critiques de* h *sont des minimums globaux.*

EXERCICES CHAPITRE 5 - Fonctions de 2 variables : Extrema sous contraintes

Exercice 47 *On considère sur* $\mathbb{R}^2$ *les fonctions :* $f(x,y) = x^2 + y^2$ *et* $g(x,y) = xy - 1$*. et le problème :* **(I)** *Minimiser* $f(x,y)$ *sous la contrainte* $g(x,y) = 0$*..*

1. *Dessiner l'allure des lignes de niveaux de* f *et* g *sur le même dessin.*
2. *Sur ce même dessin, représenter graphiquement les solutions de* **(I)**.
3. *Calculer les solutions de* **(I)** *à l'aide du Lagrangien* $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$.

Exercice 48 *On considère sur* $\mathbb{R}^2$ *les fonctions :* $f(x,y) = x^2y^2$ *et* $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$*. et le problème :* **(I)** *Maximiser* $f(x,y)$ *sous la contrainte* $h(x,y) = 0$*..*

1. *Tracer sur un même dessin les lignes de niveaux* 0, $\frac{1}{4}$ *et* 1 *de* f *et la ligne de niveau* 0 *de* h.
2. *Sur ce même dessin, représenter graphiquement les solutions de* **(I)**.
3. *Calculer les solutions de* **(I)** *à l'aide du Lagrangien* $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda h(x,y)$.