INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES
APPLIQUÉES
RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
2 ème année **Analyse 3**

Analyse 3 : Liste des exercices

Annales des années précédentes, exercices supplémentaires :

INSA Institut National des Sciences Appliquées Rennes

Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
2 ème année **Analyse 3**
Liste 1: Intégrales généralisées

Exercice 1 Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x+1}$ et $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x-1}$ sont divergentes.

Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx$?

Exercice 2 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Exercice 3 Étudier la convergence en fonction des paramètres

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}(1-x)^{\beta}}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}} dx, \quad a \text{ réel} > 0, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-tu} \sin u \, du, \qquad \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha}} dt.$$

Exercice 4 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} \text{ (faire le changement } t = \sqrt{1+x}), \qquad \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right) dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2} dx, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 5 Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $u_n \leq \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$ en comparant $\dfrac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est bornée puis convergente.

Soit f la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = n$, $f\left(n - \frac{1}{n^3}\right) = f\left(n + \frac{1}{n^3}\right) = 0$ et f est affine sur $\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right]$ et sur $\left[n, n + \frac{1}{n^3}\right]$,
- f est nulle ailleurs.

3. Donner l'allure du graphe de f.

4. Comparer $\displaystyle\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t)\, dt$ et u_n.

5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge bien que f soit non bornée.

Exercice 6 Étudier la convergence des séries suivantes dont on donne le terme général :

1.	$\dfrac{\ln n}{2^n}$,	2.	$\dfrac{4n^2-n+5}{3n^5+2}$,	3.	$\dfrac{1}{n^2\ln^2 n}$,	4.	$\dfrac{1}{\ln^2 n}$,
5.	$n\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$,	6.	$\frac{n!}{(2n)!}$,	7.	$\frac{1}{n\cos^2 n}$,	8.	$2^{-\sqrt{n}}$,
9.	$\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^2}$,	10.	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2\ln^2 n}$,	11.	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$,	12.	$\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$.

Exercice 7 Étudier la convergence des séries en fonction des paramètres

1. $a \geq 0$, $u_n = na^n$,
2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n = n^\alpha \tan\frac{1}{n}$.
3. $a, b \geq 0$, $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.
4. α, β réels, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, série de Bertrand. *On peut étudier d'abord le cas $\alpha = 1+\varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ en comparant u_n à $v_n = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}$ pour n assez grand, puis $\alpha = 1-\varepsilon$ avec une technique similaire , enfin $\alpha = 1$, en utilisant une comparaison série-intégrale.*

Exercice 8 Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ *(Décomposer en éléments simples la fraction* $\dfrac{2}{x(x+1)(x+2)}$*).*
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$.

Exercice 9 On définit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{w_n}$,
2. Etudier la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. *Pour les deux dernières, on pourra commencer par l'étude de $\sum v_n - u_n$ et $\sum w_n - u_n$.*

Exercice 10 On définit $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, reste de la série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

1. En encadrant r_n par des intégrales de la fonction f définie par $f(x) = 1/x^2$, montrer que la suite (nr_n) converge vers 1.
2. Après avoir remarqué et justifié que $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, montrer que $s_n = r_n - 1/n$ est équivalent à $1/(2n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. *On pourra encadrer s_n par les intégrales d'une fonction bien choisie.*
3. Déterminer a réel tel que $t_n = r_n - 1/n - 1/(2n^2)$ est équivalent à a/n^3 en $+\infty$.

Exercice 11 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n2^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{\sin n + \sqrt{n}} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n \text{ où } k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{3n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \text{ où } c_n = \begin{cases} 2^n \text{ si } n \text{ pair} \\ 1/2^n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 12 Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(-4)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 6^n$ diverge quelles sont les natures des séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 2^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 4^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(-6)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 8^n.$$

Exercice 13 Déterminer les développements en série entière des fonctions suivantes

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{2+x}, \quad \frac{1}{2+3x}, \quad \ln(5+x),$$

puis

$$\frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{(2+3x)^2}, \quad \frac{1}{x^3-3x+2}, \quad \frac{x^3}{(x-2)^2}, \quad \arctan x.$$

Exercice 14 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n}.$$

Exercice 15 Domaine de convergence et somme des séries entières de variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta)x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n.$$

Exercice 16 Déterminer une solution développable en série entière de l'EDO $y'' + xy' + y = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Même question avec une solution de $xy'' + y' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$.

Pour aller plus loin...

Exercice 17 On considère l'équation : $(E)\ :\ x^2(x-1)y''(x)+x(x+1)y'(x)-y(x)=0$.

1. Déterminer une solution de (E) développable en série entière $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en précisant le rayon de convergence R.
2. Peut-on prolonger f en dehors de $[-R,R]$ en une solution de (E).
3. Déterminer une autre solution de (E) sous la forme $g(x)=f(x)\varphi(x)$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) (espace vectoriel de dimension 2).

Exercice 18 Soit $f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n$.

1. Montrer que (f_n) est la suite de Fibonacci (Merci de consulter la littérature ou Internet...).
2. Décomposer f en éléments simples et trouver une nouvelle expression de f_n.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
2 ème année **Analyse 3**
Liste 4: Séries de Fourier

Exercice 19 Dans chacun des cas suivants, tracer la fonction, qui est supposée T périodique, et donner son développement en série de Fourier (on précisera les points où f est égale à sa série de Fourier).

1. $T = 2\pi$, $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } t \in]0, \pi[\end{cases}$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. $T = 2\pi$, $f(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi[$.
3. $T = 2\pi$, $f(t) = |t|$ si $t \in]-\pi, \pi[$; en déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. $T = 2\pi$, $f(t) = t^2$ si $t \in [-\pi, \pi[$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
5. $T = 1$, $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-1/2, 0[\\ t & \text{si } t \in [0, 1/2] \end{cases}$.
6. $T = 5$, $f(t) = 4t$ pour $0 \leq t < 5$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 20 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \max(\sin x, 0)$.

1. Représenter le graphe de la fonction.
2. Déterminer ses coefficients de Fourier et étudier la convergence de la série de Fourier.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$, et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.
4. Déterminer le développement en série de Fourier de f où $f(x) = |\sin x|$.

Exercice 21 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de période $T > 0$. Comparer les coefficients de Fourier de f et ceux de f'.

Exercice 22 Soit $\varphi(z) = \dfrac{1}{2-z}$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la partie réelle de $\varphi(e^{ix})$.
2. Déterminer le développement en série entière de $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, en précisant le rayon de convergence.
3. En déduire, par identification, le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2-\cos x}{5-4\cos x}$.
4. En déduire sans calcul $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\,dx$, avec peu de calculs, $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\right)^2 dx$.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2024-2025
2 ème année **Analyse 3**
Liste 5: Fonctions à plusieurs variables

Lignes de niveaux, continuité

Exercice 23 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition D, le dessiner dans $\mathbb{R}^2$, vérifier si la fonction est continue sur son ensemble de définition et tracer l'allure des ensembles de niveaux $f(x, y) = c$ pour les valeurs de c indiquées.

1. $f(x, y) = y^2, \quad c = -1, 0, 1, 4.$
2. $f(x, y) = \frac{1}{2}x + y, \quad c = -2, -1, 0, 1, 2.$
3. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1), \quad c = -100, 0, 2.$
4. $f(x, y) = \sqrt{1 - xy}, \quad c = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$

Exercice 24

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et (x_0, y_0) donné. On suppose que les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ sont continues en x_0 et y_0. Cela implique-t-il que f est continue en (x_0, y_0) ?
2. Étudier, en utilisant la **définition**, la continuité en $(0, 0)$ de

$$f(x, y) = |1 + x + y| \quad \textit{[majorer } |f(x, y) - 1| \textit{ en observant que } |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}\textit{]},$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{pour } (x, y) \neq (0, 0)\,, \\ 0 & \text{pour } (x, y) = (0, 0)\,. \end{cases}$$

Exercice 25 Étudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1/2 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Dérivées partielles

Exercice 26

1. Montrer, en utilisant la définition, que $f(x,y) = xy$ est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les dérivées partielles, là où elles existent, de
$$f(x,y) = \sin\frac{x}{y}\ ; \qquad\qquad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3. Trouver l'équation du plan tangent en $M_0(1,2)$ à la surface d'équation $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

4. Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $h\,(t) = f\,(t, g\,(t))$. Calculer $h'(t)$ et $h''(t)$ en fonction des dérivées partielles premières et secondes de f, de $g^{'}\,(t)$ et $g''\,(t)$.

5. Soit $\varphi(t) = f(2t, -t)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $(0,0)$. Donner un développement limité de φ à l'ordre 2 en 0.

Exercice 27 Calculer les dérivées partielles premières là où elles existent et étudier leur continuité.

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

2. $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) \in \Delta = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\}, \\ x \arctan\frac{y}{x} & \text{si } (x,y) \notin \Delta. \end{cases}$

Exercice 28 Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

1. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ en $(0,0)$?

Changements de variables et équations aux dérivées partielles (EDP)

Exercice 29 Soit f une fonction de deux variables. Résoudre les EDP :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On considère la fonction $F :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

1. Déterminer $\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}$.

2. Soit $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\right\}$. Résoudre l'EDP $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur Ω en passant en coordonnées polaires.

3. Calculer le Laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ de f en cordonnées polaires.

4. Trouver les solutions radiales de l'EDP de Laplace $\Delta f = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Exercice 31 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On effectue le changement de variables

$$u = x + ay, \qquad v = x + by$$

de sorte que $f(x, y) = F(u, v)$.

1. Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que ce changement de variables soit acceptable ?
2. Exprimer les dérivées partielles premières et secondes de f à l'aide de celles de F.
3. En utilisant $a = -1$ et $b = 1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.
4. En utilisant $a = 1$ et $b = -1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.
5. En utilisant $a = 0$ et $b = 1$, résoudre l'EDP : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Extrema libres et liés, optimisation

Exercice 32 Trouver les points critiques des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^2$ et, dans chaque cas, indiquer s'il s'agit d'extréma locaux.

$$f(x, y) = 4xy - 2x^2 - y^4, \quad f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2, \quad f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

Exercice 33 Soit $K = [0, 1] \times [0, 1]$ et f la fonction définie sur K par $f(x, y) = x - y + x^3 + y^3$.

1. Justifier l'existence d'un maximum et d'un minimum global de f sur K.
2. Étudier les extrema globaux et locaux de f sur K.

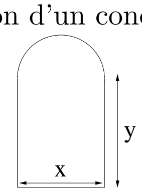
Exercice 34 Soit $f(x, y) = xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner l'allure des lignes de niveaux de f.
2. Étudier les extrema de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. Même question pour les extréma de f sous la contrainte $4x^2 + y^2 = 4$.

Exercice 35 Trouver la distance (la plus courte) dans le plan du point $(1, 2)$ à la droite d'équation $2x + 3y = 1$.

Exercice 36 En utilisant une quantité α d'aluminium, concevoir la boîte de conserve (un cylindre) ayant un volume V maximal, sachant que le fond et le dessus doivent avoir double épaisseur.

Exercice 37 (DS janvier 2012) La section d'un conduit d'air a la forme suivante



Pour optimiser le coût de construction, celui-ci doit avoir le plus petit périmètre possible sachant que, pour des raisons de fonctionnement, l'ouverture doit avoir une aire égale à c. Déterminer les dimensions x et y du rectangle de manière à optimiser le coût.

Exercice 38 Trouver les dimensions du cylindre de volume maximal qui peut être contenu dans une sphère de rayon R.

Exercice 39 Une entreprise chauffe ses locaux de la façon suivante : sur une période de 24h, par tranches de 8h, une chaudière chauffe avec une température constante,

T_0 de 9h à 17h (occupation des locaux), T_1 de 17h à 1h, T_2 de 1h à 9h.

Si la chaudière est maintenue à une température constante T pendant une tranche de 8h, la température y des locaux à la fin de la tranche est donnée par la relation

$$y = bx + (1 - b)\,(aT + (1 - a)S)\,,$$

où x est la température des locaux au début de la tranche horaire, S est la température extérieure (pour simplifier, on la supposera fixée une fois pour toute) et $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$ sont des paramètres fixés. En particulier, si T est choisie telle que $y = x$ alors la température reste constante pendant les 8h considérées. Le coût du chauffage pendant cette tranche est donné par

$$\alpha(T - S)^2$$

où $\alpha > 0$ est une constante fixée (on pourra la prendre égale à 1 dans la suite).

1. Supposez que vous êtes le responsable du service gestionnaire. Votre objectif est de déterminer le plan de chauffage optimal (minimisant le coût) sur 24h afin que, pendant la période d'occupation des locaux, la température ambiante garde une valeur x_0 prescrite.

1.a. Comment doit être choisi T_0 pour que la température des locaux, étant à x_0 à 9h, reste constante de 9h à 17h ?

1.b. Quelle relation doivent alors vérifier T_1 et T_2 pour que la température revienne à x_0 après un cycle de 24h ?

1.c. Déterminer le programme optimal.

1.d. Application numérique : $a = 2/3$, $b = 1/4$, $S = 0°$, $x_0 = 20°$.

2. (facultative) Pour des raisons d'économie, le PDG décide de réduire subitement le budget de chauffage, c'est-à-dire qu'il fixe un coût, moindre que le précédent, et vous devez faire avec. Votre objectif est maintenant de maximiser la température x_0 des locaux pendant la période d'occupation avec les moyens dont vous disposez. Quel est le nouveau programme optimal ?

Application : $a = 2/3$, $b = 1/4$, $S = 0°$, budget de 1600 (baisse $\approx 30\%$ par rapport à 1).