Année universitaire 2023/24
2ème année **Analyse 3**
Liste 1: Intégrales généralisées

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Exercice 1 Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x+1}$ et $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x-1}$ sont divergentes.

Que peut-on dire de l'intégrale $\displaystyle\int_2^\infty \left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$?

Exercice 2 Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \qquad \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}dx, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Exercice 3 Étudier la convergence en fonction des paramètres

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{a^x}{1+a^{2x}}dx,\ \ a \text{ réel} > 0, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-tu}\sin u\, du, \qquad \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt.$$

Exercice 4 Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x}} \text{ (faire le changement } t=\sqrt{1+x}), \qquad \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}\right)dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx, \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt, \qquad \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 5 Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $u_n \leq \displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^2}$ en comparant $\dfrac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^2}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est bornée puis convergente.

Soit f la fonction continue définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- pour tout entier $n \geq 2$, $f(n) = n$, $f\left(n-\frac{1}{n^3}\right) = f\left(n+\frac{1}{n^3}\right) = 0$ et f est affine sur $\left[n-\frac{1}{n^3}, n\right]$ et sur $\left[n, n+\frac{1}{n^3}\right]$,
- f est nulle ailleurs.

3. Donner l'allure du graphe de f.

4. Comparer $\displaystyle\int_0^{n+\frac{1}{n^3}} f(t)\,dt$ et u_n.

5. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge bien que f soit non bornée.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2023/24
2ème année **Analyse 3**
Liste 2: Séries numériques

Exercice 6 Étudier la convergence des séries suivantes dont on donne le terme général :

1. $\dfrac{\ln n}{2^n}$,	2. $\dfrac{4n^2-n+5}{3n^5+2}$,	3. $\dfrac{1}{n^2\ln^2 n}$,	4. $\dfrac{1}{\ln^2 n}$,
5. $n\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$,	6. $\frac{n!}{(2n)!}$,	7. $\frac{1}{n\cos^2 n}$,	8. $2^{-\sqrt{n}}$,
9. $\dfrac{(-1)^n\sin n}{n^2}$,	10. $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2\ln^2 n}$,	11. $\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$,	12. $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n\ln n}$.

Exercice 7 Étudier la convergence des séries en fonction des paramètres

1. $a \geq 0$, $u_n = na^n$,
2. $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n = n^\alpha \tan\frac{1}{n}$.
3. $a, b \geq 0$, $u_n = \frac{a^n}{n+b^n}$.
4. α, β réels, $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, série de Bertrand. *On peut étudier d'abord le cas* $\alpha = 1+\varepsilon$ *avec* $\varepsilon > 0$ *en comparant* u_n *à* $v_n = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon/2}}$ *pour* n *assez grand, puis* $\alpha = 1-\varepsilon$ *avec une technique similaire , enfin* $\alpha = 1$, *en utilisant une comparaison série-intégrale.*

Exercice 8 Démontrer que les séries suivantes convergent et calculer leur somme.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ *(Décomposer en éléments simples la fraction* $\dfrac{2}{x(x+1)(x+2)}$*).*
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{3^n}$.

Exercice 9 On définit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$, $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{w_n}$,
2. Etudier la nature des séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$. *Pour les deux dernières, on pourra commencer par l'étude de* $\sum v_n - u_n$ *et* $\sum w_n - u_n$.

Exercice 10 On définit $r_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$, reste de la série convergente $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$.

1. En encadrant r_n par des intégrales de la fonction f définie par $f(x) = 1/x^2$, montrer que la suite (nr_n) converge vers 1.
2. Après avoir remarqué et justifié que $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, montrer que $s_n = r_n - 1/n$ est équivalent à $1/(2n^2)$ lorsque n tend vers $+\infty$. *On pourra encadrer* s_n *par les intégrales d'une fonction bien choisie.*
3. Déterminer a réel tel que $t_n = r_n - 1/n - 1/(2n^2)$ est équivalent à a/n^3 en $+\infty$.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2023/24
2ème année **Analyse 3**
Liste 3 : Séries entières

Exercice 11 Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n2^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n!z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{\sin n + \sqrt{n}} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} z^n \text{ où } k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^{3n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \text{ où } c_n = \begin{cases} 2^n \text{ si } n \text{ pair} \\ 1/2^n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Exercice 12 Si $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(-4)^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 6^n$ diverge quelles sont les natures des séries numériques :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n 2^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 4^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (-6)^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n 8^n.$$

Exercice 13 Déterminer les développements en série entière des fonctions suivantes

$$\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{2+x}, \quad \frac{1}{2+3x}, \quad \ln(5+x),$$

puis

$$\frac{1}{(1-x)^2}, \quad \frac{1}{(2+3x)^2}, \quad \frac{1}{x^3-3x+2}, \quad \frac{x^3}{(x-2)^2}, \quad \arctan x.$$

Exercice 14 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n}.$$

Exercice 15 Domaine de convergence et somme des séries entières de variable réelle :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n\theta) x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n.$$

Exercice 16 Déterminer une solution développable en série entière de l'EDO $y'' + xy' + y = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Même question avec une solution de $xy'' + y' + y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$.

Pour aller plus loin...

Exercice 17 On considère l'équation : $(E)\ :\ x^2(x-1)y''(x)+x(x+1)y'(x)-y(x)=0$.

1. Déterminer une solution de (E) développable en série entière $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en précisant le rayon de convergence R.
2. Peut-on prolonger f en dehors de $[-R,R]$ en une solution de (E).
3. Déterminer une autre solution de (E) sous la forme $g(x)=f(x)\varphi(x)$.
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) (espace vectoriel de dimension 2).

Exercice 18 Soit $f(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n x^n$.

1. Montrer que (f_n) est la suite de Fibonacci (Merci de consulter la littérature ou Internet...).
2. Décomposer f en éléments simples et trouver une nouvelle expression de f_n.

INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Département de Mathématiques

Année universitaire 2023/24
2ème année **Analyse 3**
Liste 4: Séries de Fourier

Exercice 19 Dans chacun des cas suivants, tracer la fonction, qui est supposée T périodique, et donner son développement en série de Fourier (on précisera les points où f est égale à sa série de Fourier).

1. $T = 2\pi,\ \ f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si } t \in]0, \pi[\end{cases}$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. $T = 2\pi,\ \ f(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi[$.
3. $T = 2\pi,\ \ f(t) = |t|$ si $t \in]-\pi, \pi[$; en déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
4. $T = 2\pi,\ \ f(t) = t^2$ si $t \in [-\pi, \pi[$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
5. $T = 1,\ \ f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-1/2, 0[\\ t & \text{si } t \in [0, 1/2] \end{cases}$.
6. $T = 5,\ \ f(t) = 4t$ pour $0 \leq t < 5$; en déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 20 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \max(\sin x, 0)$.

1. Représenter le graphe de la fonction.
2. Déterminer ses coefficients de Fourier et étudier la convergence de la série de Fourier.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}$, et $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.
4. Déterminer le développement en série de Fourier de f où $f(x) = |\sin x|$.

Exercice 21 Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et de période $T > 0$. Comparer les coefficients de Fourier de f et ceux de f'.

Exercice 22 Soit $\varphi(z) = \dfrac{1}{2-z}$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer la partie réelle de $\varphi(e^{ix})$.
2. Déterminer le développement en série entière de $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, en précisant le rayon de convergence.
3. En déduire, par identification, le développement en série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2-\cos x}{5-4\cos x}$.
4. En déduire sans calcul $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\,dx$, avec peu de calculs, $J = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2-\cos x}{5-4\cos x}\right)^2 dx$.

DEVOIR SURVEILLÉ de Novembre 2022 — ANALYSE 3 — durée : 1h30

Tous documents et matériel électronique interdits.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous (Attention, une case cochée à tort sera pénalisé) et répondez aux questions :

1.1. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. ☐ Vrai ☐ Faux

1.2. $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ ☐ CV ☐ DV. Donner la valeur de I en cas de CV.

1.3. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{e^t - 1}$ ☐ CV ☐ DV. Donner la valeur de J en cas de CV.

1.4. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ converge ? Donner alors la valeur de K.

1.5. Valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ pour que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\beta}$ CV (mais pas absolument) ? CV absolument ?

1.6. $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{n}$ ☐ CV ☐ DV. Donner la valeur de S_1 en cas de CV.

1.7. $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}$ ☐ CV ☐ DV. Donner la valeur de S_2 en cas de CV.

1.8. Calculer le rayon de convergence et la somme de $f(x) = \sum (2^n - 3^n)x^n$.

1.9. Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b telles que $|a_n| \le |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors : ☐ $R_a \le R_b$ ☐ $R_a \ge R_b$ ☐ $R_a = R_b$

1.10. Chercher la solution de l'EDO $(1+x)y' - \frac{1}{3}y = 0$, $y(0) = 1$, sous la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exercice 2. On définit la série entière $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n S_n x^n$ où $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ est la somme partielle de la série harmonique. On admettra que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Utiliser l'équivalent de S_n pour répondre aux questions 2.1, 2.2 et 2.3.

2.1. Redémontrer que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

2.2. Démontrer que la série numérique $f(1)$ diverge grossièrement.

2.3. Calculer le rayon de convergence R de $f(x)$.

2.4. Calculer $(1+x)f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 3. On peut traiter chaque question sans avoir résolu la précédente.

3.1. Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ converge.

3.2. Exprimer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{u}(1+u^2)}$ en fonction de I au moyen du changement de variable $u = t^2$.

3.3. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $K_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha} dt$ converge.

3.4. Par une intégration par partie, démontrer que $K_{3/2} = 4I$.

3.5. Question bonus : calculer la valeur numérique de I.

On pourra commencer par décomposer $t^4 + 1$ en produit de ses racines dans $\mathbb{C}$ puis regrouper les facteurs 2 à 2 conjugués pour obtenir une factorisation en un produit de 2 polynômes réels $P_1(t)$ et $P_2(t)$ de degré 2. Déterminer ensuite les coefficients $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de la décomposition en éléments simples $\frac{1}{t^4+1} = \frac{at+b}{P_1(t)} + \frac{ct+d}{P_2(t)}$ pour pouvoir calculer l'intégrale.