

Intégration

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur \mathbb{R} ? Leurs carrés sont-ils intégrables ?

$$f_1(x) = e^{-x^2} \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2 Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

- Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(2t)}{t} dt$ existe. [Intégrer par parties.]
- En déduire que $f \notin L^1([1, +\infty[)$.
[Considérer la fonction $x \mapsto f(x) \sin(x)$ et utiliser 1.]
- Démontrer que $f \in L^2([1, +\infty[)$.

Exercice 3 Étudier la limite, quand $n \rightarrow +\infty$, des intégrales suivantes

$$\int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx, \quad \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2 + \cos(x)}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^n + e^x} dx, \quad \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx, \quad \alpha > 1.$$

[INDICATIONS. 1: Intégrer par parties. 2: Appliquer Beppo-Levi. 3: Appliquer la convergence dominée. Pour 4, on pourra utiliser l'inégalité $\forall u \geq 0, \ln(1 + u) \leq u$.]

Exercice 4 On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

$$\text{Soit } F \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx.$$

- En utilisant les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégral, démontrer que F est continue sur \mathbb{R} et dérivable sur $]0, +\infty[$. Démontrer que

$$F'(t) = -2Ie^{-t^2} \quad \text{pour tout } t \in]0, +\infty[.$$

- En intégrant l'égalité précédente, démontrer que

$$F(T) - F(t) = -2I \int_t^T e^{-x^2} dx \quad \text{pour tous } 0 \leq t < T.$$

- Démontrer que $F(t) = 2I \int_t^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 5

- Démontrer que si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ avec $\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx$.
- Démontrer que si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f * g(x)| \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2 dt}$.

Transformation de Fourier

On rappelle la liste des **transformées de Fourier usuelles**. Dans ce qui suit, $\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha, \beta]$ (qui vaut 1 si $x \in [\alpha, \beta]$ et 0 sinon), $\text{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ est le sinus cardinal, H est la fonction d'Heaviside (qui vaut 1 si $x \geq 0$ et 0 sinon) et $\text{sgn}(x)$ est la fonction signe (qui vaut -1 si $x < 0$ et 1 si $x > 0$).

Le nombre a est un complexe tel que $\text{Re}(a) > 0$, k est un entier positif et ω un réel tel que $\omega > 0$.

	Fonction $f : x \mapsto f(x)$	Transformée de Fourier $\hat{f} : \xi \mapsto \hat{f}(\xi)$
1	$\mathbf{1}_{[\alpha, \beta]}(x)$	$(\beta - \alpha) e^{-i(\alpha + \beta)\pi\xi} \text{sinc}((\beta - \alpha)\pi\xi)$
2	$H(x)e^{-ax}$	$\frac{1}{a + 2i\pi\xi}$
3	$H(-x)e^{ax}$	$\frac{-1}{-a + 2i\pi\xi}$
4	$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
5	$\text{sgn}(x)e^{-a x }$	$\frac{-4i\pi\xi}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}$
6	$H(x) \frac{x^k}{k!} e^{-ax}$	$\frac{1}{(a + 2i\pi\xi)^{k+1}}$
7	$H(-x) \frac{x^k}{k!} e^{ax}$	$\frac{-1}{(-a + 2i\pi\xi)^{k+1}}$
8	$\frac{1}{a + 2i\pi x}$	$H(-\xi)e^{a\xi}$
9	$\frac{1}{a - 2i\pi x}$	$H(\xi)e^{-a\xi}$
10	$e^{-\omega x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\omega}} e^{-\frac{\pi^2}{\omega} \xi^2}$
11	$\text{sinc}(x)$	$\pi \mathbf{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi)$

Exercice 6 Recalculer les transformées de Fourier de la colonne de droite du tableau en précisant à chaque fois s'il s'agit d'une transformée dans $L^1(\mathbb{R})$ ou dans $L^2(\mathbb{R})$.

[INDICATIONS (le numéro désigne la ligne du tableau). 1,2: calcul direct. 3,4,5: se déduit de 2 avec des propriétés du cours. 6,7: calcul avec des propriétés du cours. 8,9: par inversion. 10: utiliser une équation différentielle, cf. cours. 11: par inversion.]

Exercice 7 Soit $a > 0$ et $f_a(t) = \frac{\pi}{a} \mathbf{1}_{\left[\frac{-a}{2\pi}, \frac{a}{2\pi}\right]}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de f_a (à l'aide du tableau).
2. Calculer la transformée de Fourier du produit de convolution $f_a * f_a$.
3. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $h(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ ainsi que la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx$.

Exercice 8 Calculer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx$, $\omega > 0$.
[INDICATION: on pourra utiliser la 4ème ligne du tableau.]

Exercice 9 Résolution d'équations différentielles avec la transformée de Fourier.
La transformation de Fourier permet de résoudre des équations différentielles suivant le principe suivant :

équation différentielle $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ équation plus simple \rightarrow solution $\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}}$ solution équation différentielle

En particulier, lorsque l'équation différentielle est une EDO linéaire à coefficients constants d'inconnue f , on est ramené à résoudre une équation algébrique pour trouver \hat{f} qui s'exprimera alors comme un produit dans l'espace de Fourier. Ainsi, la solution f s'écrira comme un produit de convolution.

1. Utiliser la méthode ci-dessus pour résoudre l'EDO $-f''(t) + f(t) = e^{-t^2}$ dans \mathbb{R} .
2. Retrouver le résultat précédent en résolvant l'EDO avec la méthode de variations des constantes.

Analyse complexe

Exercice 10 On note \log le logarithme complexe principal défini dans le demi-plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ avec des arguments à valeurs dans $] -\pi, \pi[$. Soit $z = \frac{-1-i}{\sqrt{3}+i}$. Déterminer module et argument de z . Calculer z^3 , $\text{Log}(z)$, $z^{1/2}$ et $z^{2/3}$.

Exercice 11 Les fonctions ci-dessous sont-elles holomorphes sur \mathbb{C} (ou une partie de \mathbb{C})?

$$f_1(z) = z^2 \quad f_2(z) = \text{Re}(z) \quad f_3(z) = \bar{z} \quad f_4(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}.$$

Exercice 12 Déterminer les rayons de convergence des séries suivantes et calculer la somme pour les 2 premières.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)z^n \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n!z^n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2} z^n.$$

Exercice 13 Développer en série entière les fonctions suivantes et indiquer les domaines de convergence des séries obtenues.

$$f_1(z) = \frac{z^2}{1+z} \text{ en } z=0 \text{ et en } z=i, \quad f_2(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \text{ en } z=0, \quad f_3(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \text{ en } z=0.$$

Exercice 14 Calculer $\int_{\gamma} \omega$ dans les cas suivants.

- $\omega = \text{Im}(z)dz$ et γ est le demi-cercle trigonométrique supérieur.
- $\omega = \bar{z}^m dz$ et γ est le cercle trigonométrique, $m \in \mathbb{Z}$.
- $\omega = \text{Re}(z)dz$ et γ est le triangle $[-i, 1-i, 1+i, -i]$.

Exercice 15 Étudier les singularités des fonctions suivantes et calculer les résidus correspondants.

$$f_1(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3} \quad f_2(z) = \frac{\exp(i\pi z)}{(z+2)^3} \quad f_3(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Exercice 16 Calculer les intégrales suivantes ($C^+(0, R)$ désigne le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru dans le sens trigonométrique).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C^+(0, R)} \frac{\cos z}{z(z-1)} dz \text{ pour } R > 0 & I_2 &= \int_{C^+(0, 3)} \frac{\exp(2z)}{(z+1)^4} dz \\ I_3 &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - \sin \theta} & I_4 &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + \cos \theta}{5 + 4 \cos \theta} d\theta \\ I_5 &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx & I_6 &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + 1} dx, \quad \omega > 0. \end{aligned}$$

Solutions : $I_1 = -2i\pi$ pour $0 < R < 1$; I_1 non défini pour $R=1$; $I_1 = 2i\pi(\cos(1) - 1)$ pour $R > 1$.
 $I_2 = (8i\pi)/(3e^2)$. $I_3 = 2\pi/\sqrt{3}$. $I_4 = -\pi/3$. $I_5 = \pi/2$. $I_6 = \pi e^{-\omega/2}$.