

Rappels et Exercices pour préparer le cours d'analyse du Tronc Commun

Ces notes ne remplacent pas les cours et TD correspondants. Je vous conseille fortement de consulter vos cours de Terminale, 1ère et 2ème année et de profiter des articles de Wikipedia sur les sujets ci-dessous.

1 Nombres complexes et trigonométrie

⇨ Savoir manipuler les nombres complexes (forme cartésienne, forme trigonométrique) et connaître leur interprétation géométrique.

⇨ Savoir trouver très rapidement les racines d'un trinôme dans \mathbb{C} .

⇨ Avoir de l'aisance avec les formules trigonométriques.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On peut écrire $z = x + iy$ (forme cartésienne avec $x = \text{Re}(z)$ et $y = \text{Im}(z)$) ou $z = re^{i\theta}$ (forme trigonométrique avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$).

Passage cartésien → trigo : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et θ donné par $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Passage trigo → cartésien : $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$.

Conjugué : $\bar{z} = x - iy = re^{-i\theta}$

Module : $|z|^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$

$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$

$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (inégalité triangulaire)

Argument : $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

$\arg(z^k) = k \arg(z) \pmod{2\pi}$, pour $k \in \mathbb{Z}$

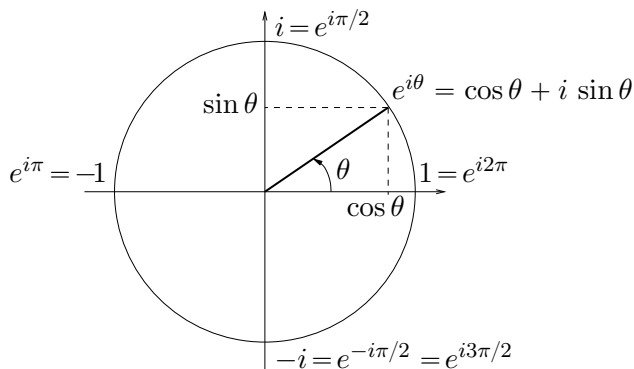
$\arg(\bar{z}) = \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}$

Remarque : $a = b \pmod{2\pi}$ (ou $a = b + 2k\pi$) signifie qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$. Un argument n'est donc défini qu'à un multiple de 2π près. Dire que l'argument de z vaut $\frac{\pi}{6}$ et la même chose que dire qu'il vaut $\frac{-23\pi}{6}$ ou $\frac{49\pi}{6}$.

Lien nombres complexes et trigonométrie :

$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, $\sin(\theta) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

$(e^{i\theta})^k = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^k = \cos(k\theta) + i \sin(k\theta)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ (Formule de Moivre)



angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\emptyset

Formules trigonométriques :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + \pi n) = (-1)^n \cos(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\sin(x + \pi n) = (-1)^n \sin(x), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad (\text{Pythagore sur le cercle trigonométrique})$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$$

$$\text{Si } t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \text{ alors } \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2} \quad (\text{Bioche})$$

Exercice 1 Soit $z = \sqrt{3} + i$. Calculer $|z|$, $\arg(z)$, $\frac{1}{z}$ et $z^{2019} + \bar{z}^{2019}$.

Exercice 2 Trouver les racines dans \mathbb{C} du polynôme $z^2 + z + 1$ et les exprimer en fonction de $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice 3 Faire un dessin illustrant l'inégalité triangulaire. Quelles sont les conditions sur z_1, z_2 pour avoir égalité ?

Exercice 4

1. Choisissez quelques formules trigonométriques et redémontrez-les.
2. Linéariser $\cos^3(x)$, $\sin^3(x)$.
3. Calculer $\sum_{n=0}^N \sin(nx)$.

2 Binôme de Newton et polynômes

⇔ Savoir manipuler les sommes à l'aide du symbole Σ (changement d'indice, etc.).

⇔ Savoir factoriser un polynôme (cas simples).

⇔ Savoir faire une décomposition en éléments simples.

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et tous nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$, $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, où le

$$\text{coefficient binomial } \binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)}{1 \times 2 \times \cdots \times k}.$$

Exercice 5 Soit $S_k(n) = \sum_{i=0}^n i^k$. Calculer $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$ (peut être fait par récurrence si vous connaissez les formules).

Exercice 6

1. Factoriser le polynôme $X^4 + 4$ dans \mathbb{C} (et dans \mathbb{R} ?)
2. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{X^2-1}, \frac{X^4}{X^2-1}, \frac{25}{(X+2)(X^2+1)^2}$.

Exercice 7 Soit $P(z) = \sum_{i=1}^n z^i$. Calculer cette somme (en distinguant les cas $z = 1$ et $z \neq 1$). En déduire les racines de P dans \mathbb{C} .

3 Inégalités fondamentales et fonctions usuelles

- ⇨ Connaître les inégalités ci-dessous et savoir les appliquer.
- ⇨ Être capable de faire très rapidement une étude de fonction (du type Terminale ou 1ère année) pour aboutir à l'allure du graphe.

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Inégalité triangulaire :

Si A, B, C sont 3 points du plan alors $AB \leq AC + CB$.

$|x + y| \leq |x| + |y|$ si $x, y \in \mathbb{R}$ (inégalité triangulaire)

$||x| - |y|| \leq |x - y|$ (2ème inégalité triangulaire)

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Si $\vec{u} = (x_1, \dots, x_n), \vec{v} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$

Forme intégrale: si $f, g \in C^0([a, b])$ alors $\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx}$

Inégalité de accroissements finis :

Soit $f \in C^0([a, b])$ dérivable avec $|f'| \leq M$ sur $]a, b[$.

Alors, pour tous $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

$\ln(1 + x) \leq x \leq e^x - 1$ pour $x > -1$

$|\sin(x)| \leq |x|$ pour $x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ pour $x, y \geq 0$

Exercice 8

1. Démontrer la 2ème inégalité triangulaire à partir de la 1ère.
2. Démontrer les 3 dernières inégalités

Exercice 9 Tracer très rapidement l'allure de certaines des fonctions suivantes : $-x^2 + x, \sqrt{x + 2}, |x - 3|, e^{x+1}, \frac{x}{x+1}, x \ln(x), \sin(x), \cos(x), \sin(x), \tan(x), \arctan(x), \text{ch}(x), \text{sh}(x), \sin\left(\frac{1}{x}\right), x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

4 Croissances comparées

- ⇨ Savoir manipuler les notations o, \sim, O, \ll .
- ⇨ Comprendre et connaître les croissances comparées usuelles.

Pour tous $A, B, C, D, \delta > 0$ avec $B < C$, on a

$$(\ln x)^A \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x^B \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} x^C \underset{x \rightarrow +\infty}{\ll} e^{\frac{x^\delta}{D}}$$

Remarques :

1. (Rappel sur le symbole négligeable \ll) $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$ signifie que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (avec g ne s'annulant pas au voisinage de a) et cette notation se lit "f est négligeable devant g au voisinage de a". Ici a peut-être un nombre ($a = 0$ par exemple) mais aussi l'infini ($a = \pm\infty$).
2. (Rappel sur les équivalents) $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ signifie que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ (avec g ne s'annulant pas au voisinage de a) et cette notation se lit "f est équivalent à g au voisinage de a".
3. (Rappel sur les petits o) Par définition, $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si on peut écrire, au voisinage de a , $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ où $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 quand $x \rightarrow a$ (et qu'on ne connaît pas forcément de manière précise).
4. (Rappel sur les grands O) Par définition, $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si on peut écrire, au voisinage de a , $f(x) = g(x)B(x)$ où $B(x)$ est une fonction bornée (qu'on ne connaît pas forcément de manière précise), c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ quand x est proche de a .

Exercice 10 Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|x^{100}e^{-x}| \leq C$ pour tout $x \geq 0$. [On remarquera que $f(x) = x^{100}e^{-x}$ est une fonction continue sur $[0, +\infty)$ qui tend vers 0 en $+\infty$.]

Exercice 11

1. Vérifier que, au voisinage de 0, $x^{n+1} = o(x^n)$, $x^m o(x^n) = o(x^{n+m})$, $o(x^n)/x^m = o(x^{n-m})$ et que $o(1)$ est tout simplement une notation pour désigner une fonction qui tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$.
2. Vérifier que, au voisinage de 0, si $f(x) = o(g(x))$ alors $f(x) = O(g(x))$ mais trouver un contre-exemple montrant que la réciproque n'est pas vraie.

Exercice 12

1. Vérifier que si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x)$ alors $f(x) - g(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$ et $f(x) = g(x) + o(g(x))$ au voisinage de a .
2. Vérifier que si $f(x) \sim_{x \rightarrow a} \ell$ avec $\ell \neq 0$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$. Comprendre pourquoi être équivalent à 0 n'a aucun sens.

5 Développements limités (DL)

- ⇨ Comprendre à quoi sert un DL.
- ⇨ Connaître les DL classiques.
- ⇨ Savoir faire un DL.

Le but d'un développement limité (DL) est de pouvoir simplifier une fonction $f(x)$ compliquée au voisinage d'un point x_0 de \mathbb{R} en l'écrivant sous la forme

$$f(x) = [\text{polynôme } P_{n,x_0}(x) \text{ de la variable } x] + [\text{reste } R_{n,x_0}(x) \text{ petit quand } x \text{ est proche de } x_0].$$

Faire un DL, c'est trouver le polynôme et estimer la taille du reste. En général, on fait un développement limité à un certain ordre n qui est la degré du polynôme qui approche f en x_0 . Plus n est grand, plus le DL est précis.

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $a < x_0 < b$.

Formule générale de Taylor-Young pour les fonctions régulières : si $f \in C^n(]a, b[)$ (dérivable n fois et la dérivée n ème est continue) alors on peut faire un DL de f en x_0 à l'ordre n (qu'on notera $DL_n(x_0)$),

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n)$$

Le polynôme est $P_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ et le reste $R_{n,x_0}(x) = o(|x-x_0|^n)$.

Remarques :

1. Cette formule donne les coefficients du $DL_n(x_0)$ à tout ordre n mais quand n est grand ($n \geq 3$), on préfère combiner les formules usuelles ci-dessous pour trouver les DL (ce qui évite de devoir dériver des fonctions f qui peuvent être compliquées).
2. Les DL sont en général donnés au voisinage de 0. Par translation, on posant $g(x) = f(x_0 + x)$, on peut les déduire en n'importe quel point x_0 de \mathbb{R} .
3. On peut obtenir un Développement Asymptotique de f (i.e., une approximation de f quand $x \rightarrow +\infty$) en faisant un DL de $g(1/x) = f(x)$ par rapport à la variable $y = 1/x$ qui tend vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

On a deux DL de base qui permettent de déduire une grande partie des autres.

D'après le binôme de Newton généralisé, pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \times 2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \times 2 \times 3}x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{1 \times \dots \times n}x^n + o(x^n)$$

D'après la définition de l'exponentielle

$$\exp(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

DL usuels:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

Exercice 13 (Obtention des DL usuels)

1. En utilisant le binôme de Newton généralisé pour $\alpha = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, déduire le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et les $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
2. Écrire le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1-x}$ et le $DL_{2n+1}(0)$ de $\frac{1}{1+x^2}$.
3. En intégrant les $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1+x}$ et $\frac{1}{1+x^2}$, déduire les $DL_n(0)$ de $\ln(1+x)$ et $\arctan(x)$.
4. En utilisant le DL de \exp , déterminer les $DL_n(0)$ de $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$.

Exercice 14

1. Écrire le $DL_4(0)$ de $e^{\sin x}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

6 Intégrale de Riemann, primitives et calculs

- ⇨ Comprendre ce qu'est l'intégrale d'une fonction continue (par morceaux) sur un segment.
- ⇨ Savoir calculer une intégrale classique.

Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ alors l'intégrale de f est définie par la limite (qui existe) des sommes de Riemann

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Cette définition est utilisée pour le calcul numérique d'une intégrale mais pour les calculs théoriques, on utilise en général :

Théorème Fondamental de l'Analyse. Si f est continue sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a, b]$ (i.e. la fonction dérivable définie à une constante additive près telle que $F' = f$).

Rappel sur les fonctions continues par morceaux. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $a_0 := a < a_1 < \dots < a_{N-1} < a_N := b$ de $[a, b]$ telle que :

- (i) $f \in C([a_i, a_{i+1}[: f$ est continue sur chacun des intervalles *ouverts* de la subdivision ;
- (ii) f peut-être prolongée par continuité aux bords des intervalles de la subdivision i.e., $f(a_i^+) := \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x)$ et $f(a_i^-) := \lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$

existent (mais peuvent être différentes des valeurs $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$ qui sont en général des points de discontinuité).

Faire un dessin illustrant une fonction continue par morceaux. Faire un autre dessin illustrant une fonction vérifiant seulement (i) et qui n'est pas continue par morceaux.

Primitives usuelles

(ci-dessous C est une constante réelle)

$\int (x - x_0)^\alpha dx = \frac{(x-x_0)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x_0 \in \mathbb{R} \quad \alpha \in \mathbb{N}$	sur \mathbb{R}
	$x_0 \in \mathbb{R} \quad \alpha \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha \leq -2$	sur $] -\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$
	$x_0 \in \mathbb{R} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -1$	sur $]x_0, +\infty[$
	$x_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{cas } \alpha = -1)$	sur $] -\infty, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$
$\int \frac{1}{x-x_0} dx = \ln x-x_0 + C$		
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$	$a \in \mathbb{C}^*$	sur \mathbb{R}
$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$		sur $]0, +\infty[$
$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$		sur \mathbb{R}
$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$		sur \mathbb{R}
$\int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) + C$		sur $] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\int \text{ch}(x) dx = \text{sh}(x) + C$		sur \mathbb{R}
$\int \text{sh}(x) dx = \text{ch}(x) + C$		sur \mathbb{R}
$\int \text{th}(x) dx = \ln(\text{ch}(x)) + C$		sur \mathbb{R}
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$a \in \mathbb{R}^*$	sur \mathbb{R}
$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{a} \text{argth}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	$a \in \mathbb{R}^*$	sur $] - a , a [$
$\int \frac{1}{a^2-x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left \frac{a+x}{a-x}\right + C$	$a \in \mathbb{R}^*$	sur $] -\infty, - a [, \text{ sur }] - a , a [, \text{ sur }] a , +\infty[$
$\int \frac{1}{ x } dx = \ln(x) + C$		sur $]0, +\infty[$
$\int \frac{1}{ x } dx = -\ln(-x) + C$		sur $] -\infty, 0[$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$	$a \in \mathbb{R}^*$	sur \mathbb{R}
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2-a^2} + C$	$a \in \mathbb{R}^*$	sur $] -\infty, - a [$ et sur $] a , +\infty[$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{ a }\right) + C$	$a \in \mathbb{R}^*$	sur $] - a , a [$

Exercice 15 Faire un dessin illustrant la définition de l'intégrale avec les sommes de Riemann et la signification géométrique de l'intégrale.

Exercice 16 Calculs d'intégrales

1. Soit f définie sur $[0, 4]$ par : $f(0) = -1$, $f(x) = 1$ pour $0 < x < 1$, $f(1) = 3$, $f(x) = -2$ pour $1 < x \leq 2$ et $f(x) = 4$ pour $2 < x \leq 4$. Tracer f , vérifier que f est continue par morceaux et calculer $\int_0^4 f(x)dx$. [Calculer $F(x) = \int_0^x f(y)dy$ pour $x \in [0, 4]$. Pourquoi F n'est-elle pas dérivable ?]
2. Calculer $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) \sin(x) e^{\cos^2(x)} dx$.
3. Calculer la primitive $\int x^2 \ln(x) dx$.
4. Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx$.
5. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin(x)} dx$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$ (Bioche).
6. Calculer $\int_0^1 \frac{3x+1}{(x+1)^2} dx$.

7 Intégrales généralisées

- ⇨ Comprendre ce qu'est une intégrale généralisée.
- ⇨ Savoir prouver la convergence ou la divergence d'une intégrale généralisée.
- ⇨ Savoir calculer la valeur d'intégrales généralisées (le calcul utilise en général les techniques du paragraphe 6).

On veut étendre les intégrales de Riemann aux intégrales de certaines fonctions $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ qui ne sont plus continues (par morceaux) sur tout le segment $[a, b]$.

Par exemple, si $f \in C^0([a, b[)$ (f peut être discontinue en b si $b \in \mathbb{R}$ ou alors $b = +\infty$), on dit que l'intégrale *généralisée* (ou *impropre*) $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si la limite suivante existe

$$\lim_{\beta \rightarrow b, \beta < b} \int_a^\beta f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(x)dx$ est divergente.

Cas des intégrales de Riemann :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha < 1.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Méthodes classiques pour étudier la convergence d'intégrales généralisées :

1. (*Calcul*) Par le calcul en utilisant la définition : si l'on sait calculer l'intégrale $\int_a^\beta f(x)dx$ pour tous $\beta < b$ (comprendre pourquoi ce sont des intégrales de Riemann), on fait le calcul et on étudie la limite du résultat quand $\beta \rightarrow b^-$.

2. (*Comparaison pour les fonctions positives*) On compare f avec des fonctions de références plus simples dont on connaît la convergence ou divergence de l'intégrale généralisée :

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ sur $[b_0, b[$ pour $a < b_0 < b$ et $\int_{b_0}^b g$ converge alors $\int_{b_0}^b f$ converge.

Si $0 \leq g(x) \leq f(x)$ sur $[b_0, b[$ pour $a < b_0 < b$ et $\int_{b_0}^b g$ diverge alors $\int_{b_0}^b f$ diverge.

3. (*Équivalents pour les fonctions positives*)

Si f, g , sont positives sur $[b_0, b[$ pour $a < b_0 < b$ et $f \underset{b}{\sim} g$ alors $\int_{b_0}^b f$ et $\int_{b_0}^b g$ sont de même nature.

4. (*Intégration par parties pour les fonctions quelconques*) On peut essayer de calculer l'intégrale de Riemann $\int_a^\beta f(x)dx$ pour tous $\beta < b$ par intégration par parties pour en déduire la nature de $\int_{b_0}^b f$.
5. (*Changement de variables pour les fonctions quelconques*) Un changement de variable ne modifie pas la nature d'une intégrale généralisée. On peut donc faire des changements de variables pour se ramener à une intégrale dont il est plus facile d'étudier la convergence.
6. (*Comparaison séries-intégrales*) Si f est positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$ alors $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ sont de même nature.

Certaines des méthodes ci-dessus ne s'appliquent qu'aux fonctions positives (ou plus généralement, ces méthodes fonctionnent dès que les fonctions *restent de signe constant* dans un voisinage du point où se pose le problème de convergence). Mais attention, elles peuvent donner des résultats erronés si les fonctions changent de signe (fonctions oscillantes par exemple). Dans ce cas, on commencera toujours par étudier la *convergence absolue* de l'intégrale, c'est-à-dire la convergence de $\int_a^b |f(x)|dx$ car si une intégrale converge absolument, alors elle converge. Les cas les plus difficiles concernent bien sûr les intégrales qui sont convergentes mais non absolument convergentes.

Remarques :

1. Nous avons ici décrit le cas où le problème de convergence a lieu en b . Les définitions s'adaptent si le problème de convergence se pose en a . S'il se pose à la fois en a et en b , on sépare les problèmes en considérant successivement $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ pour n'importe quel $c \in]a, b[$. Dans ce cas, $\int_a^b f$ converge si et seulement si les deux intégrales précédentes convergent. Si l'une des deux diverge, alors $\int_a^b f$ diverge.
2. Dans le cours *Outils d'analyse pour l'ingénieur*, on introduira une autre notion d'intégration, l'intégrale de Lebesgue, qui est un outil plus évolué et plus puissant.

Exercice 17

1. Tracer l'allure des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ pour $\alpha = 2, 1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -1, -2, -4$.
2. Redémontrer au moins une des deux équivalences concernant les intégrales de Riemann.

Exercice 18 Étudier la convergence de certaines des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \ln x dx, \int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x} dx, \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x} dx, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1 + \sin x} dx,$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

8 Séries numériques

- ⇨ Savoir prouver la convergence ou la divergence d'une série numérique.
- ⇨ Savoir calculer la sommes d'une série convergente dans des cas simples.

Lorsqu'on veut déterminer la nature d'une série numérique $\sum u_n$, souvent le plus difficile est de démarrer, de se poser les bonnes questions. Voici des questions à se poser, dans l'ordre suivant.

1. Est il possible de calculer les sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^N u_n$ de la série ? Si la réponse est affirmative, on est ramené à un problème de convergence de suite (cf. Exercice 19). Cependant, il est rare que l'on puisse calculer S_N .
2. Le terme général de la série tend il vers 0 ? Sinon la série diverge grossièrement ; dans le cas contraire on continue (cf. Exercice 20).

3. La suite u_n est elle de signe constant ? Dans ce cas, si $u_n \leq 0$ on se ramène à $u_n \geq 0$ en posant $v_n = -u_n$. On peut alors utiliser :

3.a. La règle de d'Alembert: si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ alors $\begin{cases} \ell > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge} \\ \ell < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$. Si $\ell = 1$ on ne peut rien dire en général. Remarquons quand même que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ à partir d'un certain rang alors la série diverge grossièrement. Cf. Exercice 21.

3.b. Comparer la série à une série de référence (série de Riemann par exemple). Pour cela, on utilise le théorème des équivalents, ou plus simplement le théorème de comparaison (majorations ou minorations du terme général de la série). Cf. Exercice 22.

3.c. Comparer la série à une intégrale. Cf. Exercice 23.

4. Si u_n n'est pas de signe constant.

4.a. Y a-t-il convergence absolue ? (c'est-à-dire, est-ce que $\sum |u_n|$ est convergente ?) Bien évidemment on utilise les méthodes du 3. pour répondre à cette question.

4.b. La série vérifie-t'elle les hypothèses du théorème spécial des séries alternées ? (ou plus généralement peut-on utiliser une transformation d'Abel ?) Cf. Exercice 24.

4.c. Peut-on utiliser un DL ou un développement asymptotique du terme général ? Ceci est l'adaptation de la méthode du 3.b. pour les séries dont le terme général n'est pas de signe constant. Ici, un équivalent ne suffit plus, il faut quelque chose de plus précis. Cf. Exercice 25.

Les techniques les plus usitées ont été répertoriées ici. Il en existe d'autres : sommation par tranches, etc.

Exercice 19 Calculer les sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} q^n$ (pour les différentes valeurs de $q \in \mathbb{R}$) et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ et en déduire la nature des séries.

Exercice 20

1. Redémontrer que si la série $\sum u_n$ converge alors le terme général u_n tend vers 0.

2. Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!}$?

Exercice 21 Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{n^m}{(np)!}$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 22 Étudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right) ; \sum \frac{n^3 + 1}{n^2 \sqrt{n^2 + n^5}} ; \sum \ln \left(\frac{n^4}{n^4 + 1 + \sqrt{n^4 + 1}} \right) \text{ et } \sum \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} .$$

Exercice 23

1. Faire un dessin illustrant la comparaison série-intégrale. Expliquer pourquoi $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ et

$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ divergent si f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

2. Nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln^2 n}$?

Exercice 24 Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{0,1}}$?

Exercice 25 Nature de $\sum_{n \geq 1} \sin \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n} \pi \right)$?

9 Séries entières

⇨ Savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière.

⇨ Savoir développer certaines fonctions en série entière et réciproquement calculer certaines sommes de séries entières.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. On définit la série entière associée à cette suite par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Immédiatement se pose la question des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série converge, autrement dit quel est l'ensemble de définition de f ? Le lemme d'Abel répond à cette question :

– l'ensemble de définition est un disque de centre 0 et de rayon $R \in [0, +\infty]$, appelé rayon de convergence de la série entière ;

– à l'intérieur du disque, la série converge absolument : si $|z| < R$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| < +\infty$;

– à l'extérieur du disque, la série diverge grossièrement : $|a_n z^n| \not\rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$;

– sur le bord du disque, on ne sait pas en général et l'étude peut être délicate.

Remarques :

1. $f(0) = a_0$ est toujours défini donc $R \geq 0$. Mais R peut être égal à 0. À l'autre extrême, R peut aussi être égal à $+\infty$ ce qui signifie que f est définie sur \mathbb{C} tout entier (cf. Exercice 26).

2. Si la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang, alors f est un polynôme (donc $R = +\infty$). On dit parfois que les séries entières sont des généralisations des polynômes ("de degré infini").

3. Les séries entières seront revues dans le module *Outils d'analyse pour l'ingénieur*.

Critères pratiques pour déterminer le rayon de convergence : On peut bien sûr utiliser le lemme d'Abel et toutes les techniques liées aux séries numériques. On a 2 critères très utiles.

1. *Critère de d'Alembert* : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \in [0, +\infty]$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$.

2. *Critère de Cauchy* : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = \lambda \in [0, +\infty]$ alors $R = \frac{1}{\lambda}$.

Exercice 26 Trouver les rayons de convergences des séries entières suivantes :

$$\sum \frac{z^n}{n!}, \quad \sum n! z^n, \quad \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n, \quad \sum (n^2 + 1) 5^n z^n.$$

Exercice 27 Développer en série entière les fonctions $\frac{1}{2+3z}$ et $\ln(5+z)$.

Exercice 28 Calculer les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ et $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$.

10 Séries de Fourier

- ⇨ Savoir développer une fonction périodique en série de Fourier.
- ⇨ Savoir utiliser la formule de Parseval.

On se limitera au développement en série de Fourier donné par le théorème suivant :

THÉORÈME DE DIRICHLET. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T et de classe C^1 par morceaux.

(i) La série de Fourier $S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right)$ de coefficients

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi}{T}t\right) dt \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots,$$

converge pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(ii) De plus, on a : $S(f)(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } f \text{ est continue au point } t, \\ \frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] & \text{si } t \text{ est un point de discontinuité de } f. \end{cases}$

Remarques :

1. Si f est paire alors $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Si f est impaire alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.
2. On a le principe suivant : meilleure est la régularité de f (continue, C^1 , C^2 , ...), meilleure est la convergence de la série de Fourier (i.e., les coefficients de Fourier a_n et b_n tendent plus vite vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$).

Exercice 29

1. Tracer la fonction f , 2π -périodique, impaire sur \mathbb{R} telle que $f(t) = (\pi - t)/2$ pour $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = 0$.
2. Développer en série de Fourier f .
3. En utilisant l'égalité de Parseval $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

11 Équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires du 1er et 2ème ordre

- ⇨ Savoir résoudre une EDO linéaire du 1er ordre.
- ⇨ Savoir résoudre une EDO linéaire du 2nd ordre à coefficients constants.

Équations différentielles linéaires du 1er ordre : $y' + b(t)y = f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, avec $b, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues.

La solution générale $y_g(t)$ est la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène et d'une solution particulière $y_p(t) : y_g(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Solution de l'équation homogène $y' + b(t)y = 0$: $y_h(t) = \lambda e^{-B(t)}$ avec λ une constante et $B(t) = \int_0^t b(s) ds$ est une primitive de b sur \mathbb{R} . Comme $y_h(t)$ est définie à une constante multiplicative près, l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de dimension 1 (de l'espace des fonctions $C^1(\mathbb{R})$).

Trouver une solution particulière : si on ne voit pas de solution évidente, on cherche une solution particulière avec la méthode de variation de la constante sous la forme $y_p(t) = e^{-B(t)} \lambda(t)$ avec $\lambda(t)$ qui doit vérifier $\lambda'(t) = e^{B(t)} f(t)$ (il suffit de déterminer une primitive de $e^{B(t)} f(t)$).

Problème de Cauchy : il s'agit de la même équation associée à une condition "initiale" $y(t_0) = y_0$ (t_0 et y_0 sont donnés). Ce problème a alors une unique solution, cette condition permettant de fixer la constante λ dans la solution générale $y_g(t)$.

Équations différentielles linéaires du 2nd ordre à coefficients constants :

$ay'' + by' + cy = f(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$,

où a, b, c sont des constantes avec $a \neq 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

La solution générale $y_g(t)$ est la somme de la solution générale $y_h(t)$ de l'équation homogène et d'une solution particulière $y_p(t)$: $y_g(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

Solution de l'équation homogène $y'' + by' + cy = 0$:

L'ensemble des solutions est un sous-vectoriel de dimension 2 (de l'espace des fonctions $C^2(\mathbb{R})$) et elles s'écrivent $y_h(t) = \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t)$ où λ_1, λ_2 sont des constantes et $(y_1(t), y_2(t))$ forme une base qu'on détermine de la façon suivante : On résout l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, on a 3 cas possibles.

Cas 1 : si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, alors on a 2 racines distinctes $r^\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $y_1(t) = e^{r^+ t}$, $y_2(t) = e^{r^- t}$.

Cas 2 : si $\Delta = 0$, alors on a 1 racine double et $y_1(t) = e^{r_0 t}$, $y_2(t) = t e^{r_0 t}$.

Cas 3 : si $\Delta < 0$, alors on a 2 racines complexes conjuguées $r^\pm = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \alpha \pm i\beta$ et $y_1(t) = e^{r^+ t}$, $y_2(t) = e^{r^- t}$. Dans ce cas, on préfère souvent utiliser une autre base (réelle) $\tilde{y}_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$, $\tilde{y}_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Trouver une solution particulière : ou bien on trouve une solution évidente, ou bien on utilise la méthode de variation des constantes.

Variation des constantes : on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$, avec les fonctions $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ qui satisfont le système linéaire de Cramer

$$\begin{cases} y_1 \lambda_1' + y_2 \lambda_2' = 0 \\ y_1' \lambda_1 + y_2' \lambda_2 = \frac{f(t)}{a} \end{cases}$$

(on doit donc résoudre un système linéaire 2×2 puis intégrer λ_1' et λ_2' pour calculer y_p).

Solutions particulières lorsque le second membre $f(t)$ est de la forme exponentielle-polynomiale.

Si $f(t) = P(t)e^{dt}$ où $d \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme de degré n , on cherche $y_p(t) = Q(t)e^{dt}$ où Q est un polynôme de degré $\deg(Q) = \deg(P) + (\text{multiplicité de } d \text{ dans l'équation caractéristique})$.

Si $f(t) = P(t)\cos(dt)$ (ou $f(t) = P(t)\sin(dt)$): on cherche $y_p(t) = Q_1(t)\cos(dt) + Q_2(t)\sin(dt)$ où Q_1, Q_2 sont des polynômes tels que $\deg(Q_i) = \deg(P) + (\text{multiplicité de } d \text{ dans l'équation caractéristique})$.

Problème de Cauchy : il s'agit de la même équation associée à 2 conditions "initiales" $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = p_0$ (t_0, y_0 et p_0 sont donnés). Ce problème a alors une unique solution, ces conditions permettant de fixer les constantes λ_1, λ_2 dans la solution générale $y_g(t)$.

Exercice 30 Résoudre les EDO suivantes :

- $y' + y = \cos(e^t)$ et $y(0) = 0$.
- $y'' - 6y' + 9y = e^{2t}$

Exercice 31 Déterminer une solution développable en série entière de l'EDO $y'' + ty' + y = 0$ qui vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

12 Systèmes linéaires, inversion de matrices

- ⇔ Savoir calculer un déterminant.
- ⇔ Savoir résoudre un système linéaire.
- ⇔ Savoir inverser une matrice.
- ⇔ Savoir faire une factorisation LU.

Un système linéaire $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ peut s'écrire sous forme matricielle

$$AX = B \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si la matrice A est inversible (si $\det(A) \neq 0$) alors le système a une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$. Résoudre le système revient donc à calculer l'inverse d'une matrice. On peut :

- le faire directement à l'aide de la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{com } A)^T$ mais cette formule n'est pas exploitable de manière calculatoire dès que la dimension est grande (à la main, ne l'utiliser que pour $n \leq 3$).
- utiliser le pivot de Gauss ce qui revient à faire une décomposition $A = LU$ (triangulaire supérieure \times triangulaire inférieure). C'est la méthode à privilégier.

Exercice 32 Existe-t-il des systèmes linéaires possédant exactement 3 solutions ?

Exercice 33

1. Résoudre les systèmes $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 = 0 \\ 6x_1 + 18x_2 + 22x_3 = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$.

2. Faire la décomposition LU de $A = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Calculer le déterminant et l'inverse de $M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 34

Le plan ci-contre représente un quartier d'une ville avec des rues à sens unique. On a compté le trafic dans certaines rues pendant une heure ; on suppose que les voitures qui sont entrées dans la rue pendant cette heure sont les mêmes que celles qui sont sorties. Le but est de déterminer le trafic dans les rues où il n'a pas été mesuré.

- En faisant le bilan du flux de voitures à chaque intersection, écrire le système d'équations pour les inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 sous la forme matricielle $AX = B$.
- Résoudre le système. Peut-on retrouver quel a été le trafic dans toutes les rues ?
- Pour $i = 1, 2, 3, 4$, calculer $x_{i,\min}$ et $x_{i,\max}$ le trafic minimum et maximum dans la rue i .
- Il se trouve que pendant l'heure où ont été faites les mesures, la rue 2 était fermée à la circulation. Quel a été le trafic dans chaque rue ?

