Outils d'analyse pour l'ingénieur
3EII, 3GMA, 3SGM, 3SRC

Chapitre 3 : Analyse complexe

Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

Année universitaire 2020-2021

Introduction

Les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ les plus utiles sont les polynômes $P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$:

- Ce sont des objets « simples » : il suffit des touches $\boxplus$ $\boxminus$ $\boxtimes$ $\boxed{\div}$ de la calculatrice pour calculer leurs valeurs ;
- Ils sont essentiels dans beaucoup d'applications : optimisation, approximation [1], etc.

Il est possible et naturel d'étendre les polynômes aux nombres complexes car :

1. Les polynômes complexes $P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ sont des objets tous aussi simples que les polynômes réels, les opérations $\boxplus$ $\boxminus$ $\boxtimes$ $\boxed{\div}$ ont cours dans $\mathbb{C}$;
2. Les polynômes complexes sont même plus naturels que les polynômes réels :

Théorème 1 (Théorème fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme complexe $P(z)$ de degré N a exactement N racines (comptées avec leur multiplicité) dans $\mathbb{C}$.

Remarque : c'est faux dans $\mathbb{R}$. Par exemple, $x^2 + 1$ n'a aucune racine dans $\mathbb{R}$; c'est ce type de problème qui a motivé l'introduction de $\mathbb{C}$.

1. Par exemple, le célèbre Théorème d'approximation de Weierstrass (mathématicien allemand du XIX[e] siècle) dit qu'on peut efficacement approcher toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ par une fonction polynôme.

Objectif du cours

Le but de ce cours est d'étudier certaines fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui « ressemblent » à des polynômes.

Parmi ces fonctions, il y a les polynômes mais aussi les séries entières qui peuvent être vues comme des « polynômes de degré infini », $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Historiquement, ces séries entières ont permis d'introduire ou de définir rigoureusement de nouvelles fonctions ($\exp$, $\log$, $\sin$, $\cos$, etc.).

Toutes ces fonctions font partie d'une classe plus générale qui sont les fonctions holomorphes que nous allons commencer par définir.

Nous verrons enfin comment cette théorie permet de calculer des intégrales que vous ne savez pas encore calculer.

Remarque :
contrairement aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on ne peut pas facilement tracer[2] les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ car il faudrait se placer en dimension 4.

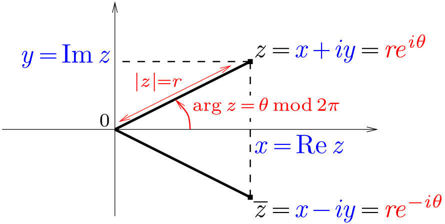
2. `http://graphes-fonctions-holomorphes.toile-libre.org/FoncHol/menu.html`

- Introduction

1. Rappels sur les nombres complexes, topologie dans le plan complexe
2. Fonctions holomorphes
3. Séries entières
4. Exponentielle complexe et fonctions usuelles associées
5. Logarithmes complexes
6. Intégrale le long d'un chemin
7. Théorème et formule de Cauchy
8. Singularités et résidus d'une fonction holomorphe
9. Calcul d'intégrales avec la formule des résidus

1.1. Rappels sur les nombres complexes [3]

Représentation d'un nombre complexe dans le plan complexe



Représentation cartésienne

$x + iy$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\longrightarrow$$
$$\longleftarrow$$

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Représentation trigonométrique

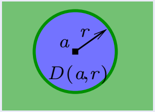
$re^{i\theta}$

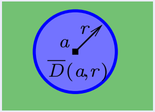
3. Revoir le cours de 1ère année sur les nombres complexes au besoin.

1.2. Topologie dans le plan complexe

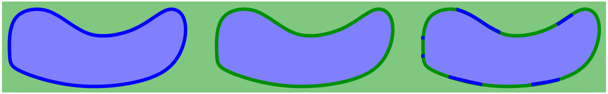
Définition 1 (Disques, ouverts, fermés, bornés, compacts)

- $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ *est le disque ouvert de centre* $a \in \mathbb{C}$ *et de rayon* $r > 0$.
- $\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$ *est le disque fermé de centre* $a \in \mathbb{C}$ *et de rayon* $r > 0$.
- *Un sous-ensemble* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *est ouvert si :* $\forall a \in \Omega$, $\exists r > 0$ *tel que* $D(a, r) \subset \Omega$
- *Un sous-ensemble* $F \subset \mathbb{C}$ *est fermé si son complémentaire* $F^C = \mathbb{C} \backslash F = \{z \in \mathbb{C} : z \notin F\}$ *est ouvert.*
- *Un sous-ensemble* $A \subset \mathbb{C}$ *est borné si :* $\exists R > 0$ *tel que* $A \subset D(0, R)$
- *Un sous-ensemble non vide* $K \subset \mathbb{C}$ *est compact si* K *est fermé et borné.*





Il vous suffira de comprendre au sens intuitif suivant : un ensemble fermé possède toute sa frontière et un ensemble ouvert ne possède aucun point de sa frontière.



A fermé $\qquad$ A ouvert $\qquad$ A ni fermé, ni ouvert exo **Représenter les ensembles et prouver les propriétés**

1. $D(a,r)$ est un ouvert borné.
2. $\overline{D}(a,r)$ est fermé et borné (donc compact).
3. $\varnothing$ et $\mathbb{C}$ sont à la fois ouverts et fermés.
4. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ est un ouvert non borné.
5. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ est un fermé non borné.
6. $\{re^{i\theta} \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 1$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$ est compact.
7. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ et $0 \leqslant \mathrm{Re}(z) < 1\}$ n'est ni fermé, ni ouvert, ni borné.

2. Fonctions holomorphes

Définition 2 (Fonctions holomorphes)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe en a si :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est } \mathbb{C}\text{-dérivable} \\ \text{en } a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} f(a+h) = f(a) + \lambda h + o(h) \\ f \text{ admet un DL à l'ordre 1 en } a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \\ \text{existe dans } \mathbb{C} \\ \text{et vaut } \lambda \end{array}}$$

Dans ce cas on note $\lambda = f'(a)$.
Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que f est holomorphe sur Ω si f est holomorphe en tous les $a \in \Omega$, on note $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Exemples (à traiter en exo et en TD)

- Tout polynôme $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. [a]
- $f(z) = \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.
- $f(z) = \overline{z}$ n'est holomorphe nulle part.

a. Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier est appelée fonction entière.

3. Séries entières

On a vu que les polynômes étaient holomorphes. Il existe une classe de fonctions fondamentale qui généralise les polynômes et dont on verra qu'elles sont holomorphes : les séries entières.

Définition 3 (Série entière)

Pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, on définit la série entière associée $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Remarques :

- Si (a_n) est nulle à partir d'un certain rang (s'il existe N tel que $a_n = 0$ pour tous $n \geqslant N+1$) alors $f(z)$ est un polynôme (de degré N).
- $z = 0$ est toujours dans l'ensemble de définition de f car $f(0) = a_0$ mais 0 peut dans certains cas être le seul z tel que la série entière converge.

3.1. Lemme d'Abel[5], rayon de convergence

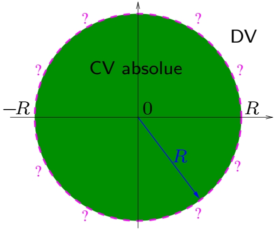
Théorème 2 (Lemme d'Abel)

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *une série entière associée à* (a_n). *Alors il existe un nombre* R *(ou* R_f *ou* R_a*)* $\in [0, +\infty]$ *appelé* ***rayon de convergence*** *caractérisé par :*

- *si* $|z| < R$ *alors la série converge absolument :* $\sum |a_n z^n|$ *converge ;*
- *si* $|z| > R$ *alors* $|a_n z^n|$ *est non-borné et* $\sum |a_n z^n|$ *diverge grossièrement.*

Si D_f est l'ensemble de définition de $f(z) = \sum a_n z^n$

on a donc : $\underbrace{D(0,R)}_{\text{Disque de convergence (Disque ouvert)}} \subset D_f \subset \underbrace{\overline{D}(0,R)}_{\text{Disque fermé}}$



Sur le bord de $D(0,R)$, tout peut arriver et l'étude peut être très délicate.[4]

4. Le comportement de $\sum a_n z^n$ sur le bord du disque de convergence ne sera pas abordé ici.
5. Niels Henrik Abel (1802–1829) mathématicien norvégien ; son nom est donné à un prix qui correspond au prix nobel de mathématiques.

3.2. Calcul du rayon de convergence

Pour déterminer le rayon de convergence, on peut utiliser la définition/Lemme d'Abel ou les critères de d'Alembert [6] et de Cauchy [7] que nous rappelons (revoir le cours de 2A).

Théorème 3

(Critère de d'Alembert) Si $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda \in [0,+\infty]$ *alors* $R = \frac{1}{\lambda}$.

(Critère de Cauchy) Si $\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n} = \lambda \in [0,+\infty]$ *alors* $R = \frac{1}{\lambda}$.

Remarques :

- ⚠ Si les limites n'existent pas, on ne peut pas utiliser ces critères.
- Dans chacun des cas, si $\lambda = 0$ alors $R = +\infty$ et si $\lambda = +\infty$ alors $R = 0$.
- Rappel : pour tout réel $a > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, on définit $\boxed{a^z := e^{z \ln a}}$ [8]

exo La série géométrique $\sum z^n$ a un rayon $R = 1$ et $\forall |z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$

Calculer le rayon de convergence de $\sum(2+(-1)^n)z^n$, $\sum \frac{z^n}{n!}$, $\sum n^n z^n$, $\sum \frac{5^n}{n^3} z^n$.

6. Jean Le Rond d'Alembert (1717–1783) est un mathématicien, physicien, philosophe et encyclopédiste français. Son critère est un des plus utilisés.
7. Augustin Louis Cauchy (1789–1857), professeur à l'École polytechnique, un des plus prolifiques mathématiciens français de l'histoire, contributions majeures en analyse complexe.
8. La fonction exponentielle complexe sera définie page 14.

3.3. Une série entière est holomorphe dans le disque de CV

Théorème 4 (Holomorphie des séries entières)

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1. *$f(z)$ est holomorphe dans $D(0,R)$ et*
$$\forall z \in D(0,R), \quad f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$
2. *$f'(z)$ est encore une série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ de même rayon de convergence R.*
3. *f est donc indéfinement dérivable (C^∞) sur $D(0,R)$:*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall z \in D(0,R),\ f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1) a_{n+k} z^n.$$

Remarques

Ce résultat signifie que, à l'intérieur du disque de convergence $D(0,R)$, tout se passe comme pour un polynôme :

1. la fonction est très régulière : elle est C^∞ et même mieux, on dit qu'elle est analytique. En particulier, $f(z)$ admet un développement limité en 0 à tout ordre :
$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n z^n}_{=o(z^N)}$$
2. On dérive (ou on intègre) une série entière monôme par monôme. Cela a des applications importantes en informatique/calcul formel, puisque, pour dériver une fonction qui s'écrit comme une série entière, il suffit de calculer la série dérivée à l'aide de l'opération $a_n \to (n+1)a_{n+1}$ (décalage d'un rang et multiplication par $(n+1)$) ce qui est beaucoup plus simple que de calculer des limites de taux de variations.

4.1. Exponentielle complexe

Définition 4 (Exponentielle complexe)

$\exp(z) = e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad R = +\infty$ *(cf. page 11)*, $\quad \exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Théorème 5 (Propriétés de l'exponentielle)

1. *($\exp$ transforme les sommes en produits)* $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
2. *($\exp$ est sa propre dérivée)* $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp' z = \exp z$.
3. *(Exponentielle réelle et logarithme néperien) La restriction à $\mathbb{R}$ de $\exp$ est la fonction exponentielle que vous connaissez : elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa fonction réciproque, appelée logarithme népérien et notée $\ln x$, est définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On a maintenant une définition rigoureuse de $\exp$ sur $\mathbb{C}$ tout entier [9] uniquement à partir de sommes et de produits, et du logarithme népérien [10] sur $\mathbb{R}^{+*}$. La définition du logarithme complexe demande un peu plus de travail, cf. page 18.

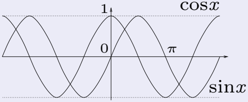
9. qui satisfait les propriétés de $\exp$ sur $\mathbb{R}$ avec lesquelles elle a été définie au lycée.
10. provient du mathématicien écossais John Napier (1550–1617), francisé en Jean Neper.

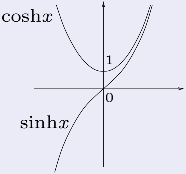
4.2. Fonctions usuelles $\cos$, $\sin$, $\cosh$, $\sinh$

Définition 5

- $\cos z := \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$
- $\sin z := \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$
- $\cosh z := \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$
- $\sinh z := \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$

Tracé sur $\mathbb{R}$





Théorème 6

- $\forall z = x + iy \in \mathbb{C},\ e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
- $\exp$ *est* $2i\pi$*-périodique* ($\forall z \in \mathbb{C},\ e^{z+2i\pi} = e^z$) *et* $\sin$ *et* $\cos$ *sont* 2π*-périodiques*
- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ *et* $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

On a une définition rigoureuse des fonctions usuelles à partir de sommes et de produits.

Formulaire trigonométrique

On peut en déduire toutes les propriétés et formules trigonométriques. [11]

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$ [12]

$$\begin{aligned} \cos(x+\pi n) &= (-1)^n \cos x \\ \sin(x+\pi n) &= (-1)^n \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(x+\tfrac{\pi}{2}) &= -\sin x \\ \sin(x+\tfrac{\pi}{2}) &= \cos x \end{aligned}$$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ (e^{ix})^n = e^{inx}}$ [13] ➪ formule de Moivre [14] $\boxed{(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)}$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(p)+\cos(q) &= 2\cos(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \\ \sin(p)+\sin(q) &= 2\sin(\tfrac{p+q}{2})\cos(\tfrac{p-q}{2}) \\ \cos(p)-\cos(q) &= -2\sin(\tfrac{p+q}{2})\sin(\tfrac{p-q}{2}) \\ \sin(p)-\sin(q) &= 2\sin(\tfrac{p-q}{2})\cos(\tfrac{p+q}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= 2\cos^2(a) - 1 \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2} = \frac{1}{1+\tan^2(\theta)} \\ \sin^2\theta &= \frac{1-\cos(2\theta)}{2} = \frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)} \end{aligned}$$

exo Démontrer que $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$ à partir de la déf. de $\cos$, $\sin$.

---

11. On se limite ici à la trigonométrie classique ; pour l'hyperbolique, voir livres ou internet. Toutes les formules de cette page sont vraies dans $\mathbb{C}$.
12. $\cos$ est paire et $\sin$ est impaire.
13. ⚠ Cette formule peut être fausse pour n non entier, voir page 21.
14. Abraham de Moivre (1667–1754) mathématicien français.

5. Logarithmes complexes

On veut définir un logarithme sur $\mathbb{C}$. On ne peut plus procéder comme sur $\mathbb{R}$ en disant que $\ln$ est la réciproque d'$\exp$ réelle car $\exp$ n'est pas bijective [15] dans $\mathbb{C}$:

Le cahier des charges [16] naturel pour définir un log sur $\mathbb{C}$ est a minima

1. qu'il coïncide avec $\ln$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. qu'il soit la réciproque de $\exp$ sur son domaine de définition
3. qu'il satisfasse les propriétés de base de $\ln$, en particulier qu'il transforme les produits en sommes.

Il faudrait donc que, $\forall z = |z|e^{i\arg(z)} \in \mathbb{C}^*$,

$$\log(z) = \log(|z|e^{i\arg(z)}) \underbrace{=}_{\text{par } ❸} \underbrace{\log|z|}_{\substack{=\ln|z| \\ \text{car } |z|\in\mathbb{R}^{+*} \\ \text{par } ❶}} + \log e^{i\arg(z)} \underbrace{=}_{\text{par } ❷} \ln|z| + i\underbrace{\arg(z)}_{\substack{\text{Problème : n'est pas} \\ \text{défini de façon unique}}}$$

15. exo $\exp$ n'est pas injective sur $\mathbb{C}$ car $\forall \zeta \in \mathbb{C}^*$, l'équation $e^z = \zeta$ pour solution tous les z_k, $k \in \mathbb{Z}$, définis par $\begin{cases} \mathrm{Re}(z_k) = \ln(\zeta) \\ \mathrm{Im}(z_k) = \arg(\zeta) + 2k\pi, \end{cases}$, où $\arg(\zeta)$ est un argument fixé de ζ.

16. exo$\star$ une conséquence est que ce log sera holomorphe sur son ensemble de définition et ne pourra pas être défini en 0.

Pour définir un logarithme, il faut donc faire un choix pour l'argument de z.

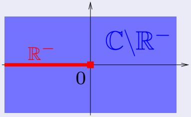
Pour le Logarithme principal, on conviendra de mesurer l'argument dans $[-\pi, \pi[$. La formule de la page précédente est alors non ambiguë et on remarque que le logarithme qu'elle définit sera discontinu au passage de la demi-droite des réels négatifs $\mathbb{R}^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leqslant 0, \mathrm{Im}(z) = 0\}$. Comme on cherche une fonction holomorphe (donc continue), on doit retirer cette demi-droite. D'où :

Définition 6 (Logarithme principal)

Pour tout z dans le plan fendu $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, on définit le Logarithme principal

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$

où $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi, +\pi[$ est l'Argument principal qui est uniquement déterminé dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.



plan fendu

Remarque : On peut définir d'autres logarithmes en mesurant autrement l'argument et en enlevant d'autres demi-droites.

exo Définir un logarithme complexe sur $\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-)$.

Théorème 7 (Propriétés du Logarithme principal)

1. Log *coïncide avec* $\ln$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $z = e^{\mathrm{Log}(z)}$.
3. $\forall z \in \mathbb{C}$ *tel que* $-\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi$, $z = \mathrm{Log}(e^z)$.
4. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, *si* $z_1 z_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, *alors* $\exists k \in \mathbb{Z}$ *tel que :*
$$\mathrm{Log}(z_1 z_2) = \mathrm{Log}(z_1) + \mathrm{Log}(z_2) + 2ik\pi.$$
5. Log *est holomorphe sur l'ouvert* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ *et* $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.
6. *(Dévelop. en série entière)* $\forall z \in D(0,1)$, $\boxed{\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n}$, $R = 1$.

Le logarithme permet de définir des fonctions puissances.

Définition 7 (Fonction puissance principale)

$\forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, $\forall a \in \mathbb{C}$, $\boxed{z^a = e^{a\,\mathrm{Log}(z)}}$.

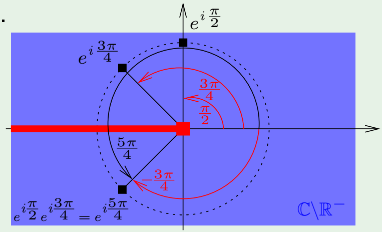
⚠ La puissance est associée au logarithme considéré : si on change de définition de logarithme, la fonction puissance change.

Exercice : $\mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}) + \mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) - 2i\pi$.

Il ne faut donc pas oublier le « $2ik\pi$ » dans le théorème 7 ❹.

Les expressions en jeu ont du sens car $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ appartiennent à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ (⚠ il faut vérifier car on peut avoir $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ et pourtant $z_1 z_2 \notin \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$).

$\mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \mathrm{Log}(e^{i\frac{5\pi}{4}}) = \ln|e^{i\frac{5\pi}{4}}| + i\,\mathrm{Arg}(e^{i\frac{5\pi}{4}}) = i(-\frac{3\pi}{4})$
car $|e^{i\frac{5\pi}{4}}| = 1$ et l'argument principal de $e^{i\frac{5\pi}{4}}$ est $-\frac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi[$ (et non $\frac{5\pi}{4}$ qui est aussi un argument mais n'est pas celui dans $]-\pi,\pi[$).



$\mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \ln|e^{i\frac{\pi}{2}}| + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$
(car $\mathrm{Arg}(e^{i\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} \in]-\pi,\pi[$).

$\mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \ln|e^{i\frac{3\pi}{4}}| + i\frac{3\pi}{4} = i\frac{3\pi}{4}$
(car $\mathrm{Arg}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \frac{3\pi}{4} \in]-\pi,\pi[$).

D'où $\mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}) + \mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) = i\frac{\pi}{2} + i\frac{3\pi}{4} = i\frac{5\pi}{4}$.

Finalement $\mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}) \neq \mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}) + \mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{4}})$
mais $\boxed{\mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}) = \mathrm{Log}(e^{i\frac{\pi}{2}}) + \mathrm{Log}(e^{i\frac{3\pi}{4}}) - 2i\pi}$
donc on retrouve Théorème 7 ❹ avec $k = -1$ dans ce cas.

Remarque

On a vu page 16 que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^z)^n = e^{nz}$ et que cette formule pouvait être <u>fausse</u> pour n <u>non entier</u>.

En effet, supposons qu'elle soit vraie par exemple pour $n = \frac{1}{2}$. On aurait alors $(e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{i\pi} = -1$. Mais $e^{2i\pi} = 1$ donc $(e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$ ce qui conduirait à l'absurdité $-1 = 1$!

L'explication de ce paradoxe apparent est que pour $n \in \mathbb{N}$,
$(e^z)^n = \underbrace{e^z\, e^z \cdots e^z}_{n \text{ fois}} = e^{nz}$ (propriété fondamentale de l'exponentielle Thm. 5 ❶),
alors que ce calcul ne fonctionne plus pour n non entier. Pour calculer $(e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}}$, il faut utiliser une fonction puissance. Par exemple, utilisons la fonction puissance associée au Logarithme principal (possible car $2i\pi \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$). On a par définition :
$(e^{2i\pi})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}\, e^{2i\pi}} = e^{\frac{1}{2} i\, \mathrm{Arg}(e^{2i\pi})} = e^0 = 1$
car $\mathrm{Arg}(e^{2i\pi}) = 0 \in]-\pi, \pi[$ (et non pas 2π).

exo Comprendre pourquoi on prend z tel que $-\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi$ dans Thm 7 ❸.

exo Calculer $\mathrm{Log}(i)$, i^i, $\mathrm{Log}(e^{i\frac{7\pi}{6}})$.

6. Intégrale le long d'un chemin

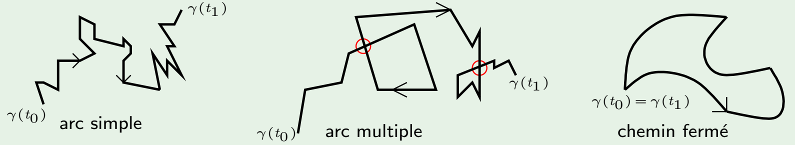
Définition 8 (Chemin)

- *Un* arc paramétré *est une application* $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ *continue*[a]*. L'arc paramétré est* simple *s'il est sans points multiples sauf éventuellement aux extrémités* ($\gamma(t) \neq \gamma(s)$ *si* $t, s \in]t_0, t_1[$, $t \neq s$) *et il est* fermé *si* $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.
- *Un* chemin *est un arc paramétré simple,* C^1 *par morceaux* (γ *est* C^1 *par morceaux) dont l'image* $\gamma([t_0, t_1])$ *est une union finie de courbes planes régulières*[b].
- *La* longueur d'un chemin[c] *est* $L(\gamma) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$.
- *le* chemin opposé[d] *à* γ *est* $\gamma_-(t) = \gamma(t_0 + t_1 - t)$.

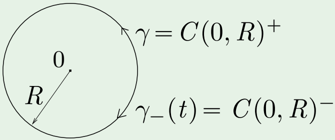
---

a. L'image de γ est $\gamma([t_0, t_1]) = \{\gamma(t) : t \in [t_0, t_1]\}$. C'est un compact de $\mathbb{C}$ exo.
b. il suffit que, là où c'est défini, $\gamma'(t) \neq 0$ sauf en un nombre fini de points.
c. Comme γ est supposée C^1 par morceaux, γ' existe p.p. et est bornée sur $[t_0, t_1]$ donc la longueur est finie.
d. C'est simplement le chemin γ parcouru dans l'autre sens.

Exemples

1. 

2. (Cercle de centre 0 et de rayon R)
On dit qu'il est orienté positivement quand il est orienté dans le sens trigonométrique et on note $C(0,R)^+$.



Paramétrisation possible [a] : $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$\gamma_-(t) = \gamma(0 + 2\pi - t) = Re^{i(2\pi - t)} = Re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$ est le cercle $C(0,R)^-$ orienté négativement.

Longueur du cercle : $L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{2\pi} |Rie^{it}| dt = 2\pi R$.

---

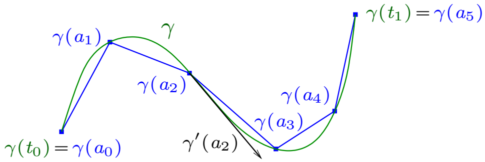
a. C'est la paramétrisation la plus naturelle mais ⚠ il en existe une infinité, par exemple $\tilde{\gamma}(t) = Re^{2it}$, $t \in [0, \pi]$ en est une autre.

Remarques sur la longueur d'un chemin

Soit γ C^1 sur $[t_0, t_1]$

$t_0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = t_1$ subdivision de pas $h = \sup a_{i+1} - a_i$

$\gamma_{(a_i)} = [\gamma(a_0)\gamma(a_1)\cdots\gamma(a_n)]$ ligne polygonale



$$L(\gamma_{(a_i)}) = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |\gamma'(a_i)||a_{i+1} - a_i| + \text{petit reste}$$

car $\gamma(a_{i+1}) = \gamma(a_i) + \gamma'(a_i)(a_{i+1} - a_i) + o(h)$ ➪ $\underbrace{|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)|}_{\text{longueur}} \approx \underbrace{|\gamma'(a_i)||a_{i+1} - a_i|}_{\text{vitesse} \times \text{temps}}$

Régularité de γ ➪ $L(\gamma_{(a_i)}) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} L(\gamma)$

et $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} |\gamma'(a_i)||a_{i+1} - a_i| \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$ (sommes de Riemann [17])

Donc $\displaystyle L(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt.$

17. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) mathématicien allemand.

Définition 9 (Intégrale le long d'un chemin)

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ *ouvert,* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *continue et* $\gamma : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ *chemin*[a] *inclus dans* Ω.

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{déf}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \qquad \textit{(Retenir : « } dz = \gamma'(t)\,dt \textit{ »)}$$

a. En fait l'intégrale définie ci-dessus ne dépend que de l'image $\gamma([t_0, t_1])$ et du sens de parcours du chemin $\boxed{\text{exo}}$.

Théorème 8 (Propriétés de l'intégrale le long d'un chemin)

1. *(linéarité)* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall f, g$, $\displaystyle\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z)\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \mu \int_\gamma g(z)\,dz.$
2. $\displaystyle\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz.$
3. $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \leqslant L(\gamma) \sup_{z \in \gamma([t_0, t_1])} |f(z)|.$

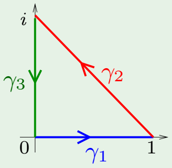
Exercices

❶ exo Comparer Thm. 8 ❷ avec le cas classique $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$

exo Comparer Thm. 8 ❸ avec $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant |b-a| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

❷ exo $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} z^n\,dz = \begin{cases} 0 & n\in\mathbb{Z}\backslash\{-1\}, \\ 2i\pi & n=-1. \end{cases}$

❸ Soit le triangle $\gamma = [0\ 1\ i\ 0]$. Alors $\displaystyle\int_\gamma (z^2+1)\,dz = 0$.



On a $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ avec :
$\gamma_1(t) = t,\ t\in[0,1]$
$\gamma_2(t) = 1-t+it,\ t\in[0,1]$
$\gamma_3(t) = (1-t)i,\ t\in[0,1]$

d'où $\displaystyle\int_\gamma (z^2+1)\,dz = \int_{\gamma_1} (z^2+1)\,dz + \int_{\gamma_2} (z^2+1)\,dz + \int_{\gamma_3} (z^2+1)\,dz$

$$= \int_0^1 (t^2+1)\cdot 1\,dt + \int_0^1 ((1-t+it)^2+1)\cdot(-1+i)\,dt + \int_0^1 (((1-t)i)^2+1)\cdot(-i)\,dt$$

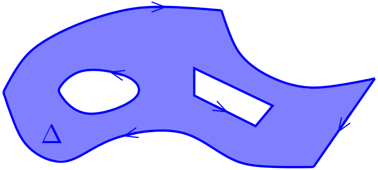
$$= \tfrac{4}{3} + \left(-\tfrac{4}{3} + \tfrac{2i}{3}\right) - \tfrac{2i}{3} = 0.$$

7. Théorème et formule de Cauchy

Définition 10 (Compact à bord)

Un compact à bord Δ est un compact de $\mathbb{C}$ dont la frontière $\partial\Delta$ est constituée d'un nombre fini de chemins fermés deux à deux disjoints et orientés de sorte à laisser toujours Δ du même côté quand on les parcourt.

Dessin d'un compact à bord



exo Comprendre pourquoi l'orientation des chemins est correcte.

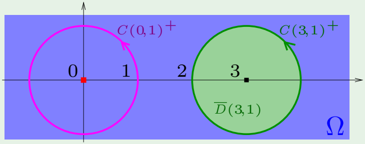
Théorème 9 (Théorème de Cauchy)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et $\Delta \subset \Omega$ un compact à bord. Alors $\displaystyle\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$.

exo Expliquer pourquoi le résultat de ❸ page 26 pouvait être obtenu sans calcul.

Exercice : $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} \frac{dz}{z} = 0$.

Soit $f(z) = \frac{1}{z}$ et l'ouvert $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. f est holomorphe sur Ω.



$\displaystyle\int_{C(0,1)^+} \frac{dz}{z} = 2\pi i$ par ❷ page 26 (avec $n=-1$). On remarque que l'intégrale est non nulle. Le théorème de Cauchy ne s'applique pas car $C(0,1)^+$ n'est le bord d'aucun compact à bord inclus dans Ω. En effet $C(0,1)^+$ est le bord (dans Ω) de :

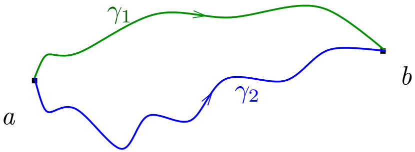
- $\overline{D}(0,1)\backslash\{0\}$ qui n'est pas un compact de $\mathbb{C}$ (n'est pas fermé dans $\mathbb{C}$),
- $\mathbb{C}\backslash D(0,1)$ qui n'est pas un compact de $\mathbb{C}$ (il est fermé mais non borné).

En revanche, $\displaystyle\int_{C(3,1)^+} \frac{dz}{z} = 0$ par le théorème de Cauchy car $C(3,1)^+ = \partial\overline{D}(3,1)$ et $\overline{D}(3,1)$ est un compact à bord inclus dans Ω.

exo Retrouver le résultat en utilisant que $\mathrm{Log}(z)$ est la primitive de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

Remarques sur le théorème de Cauchy

L'intégrale d'une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ « ne dépend pas du chemin suivi », c'est remarquable.



Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et γ_1, γ_2 deux chemins joignant les points a et b de $\mathbb{C}$.
Si $\gamma := \gamma_1 \cup (\gamma_2)_-$ alors γ est un chemin fermé, bord d'un compact à bord (la zone entourée par les deux chemins), sur lequel f est holomorphe.

Par le théorème de Cauchy, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$

D'où $\displaystyle 0 = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{(\gamma_2)_-} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$

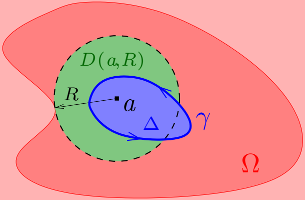
➪ $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$

Analogie en physique : le travail d'une force dérivant d'un potentiel ne dépend que des états initial et final. Même chose pour les fonctions d'état en thermodynamique.

Théorème 10 (Formule de Cauchy)

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe, $a \in \Omega$ et γ un chemin de Ω orienté positivement[a] entourant le point a. Alors

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$



De plus, f est développable en série entière au voisinage de a avec un rayon de convergence R égal au rayon du plus grand disque $D(a,R) \subset \Omega$.

$$\forall z \in D(a,R), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n \text{ avec } c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

f est donc localement une série entière[b] : on dit que f est analytique. En particulier, f est C^∞ sur Ω.

---

a. Le chemin γ est parcouru dans le sens trigonométrique et délimite un compact à bord $\Delta \subset \Omega$.

b. on peut l'écrire comme une série entière sur un disque entourant a mais pas forcément globalement sur Ω.

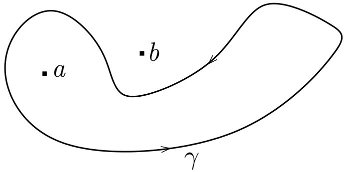
Remarques sur la formule de Cauchy

- Ce résultat complète le lien entre les séries entières et les fonctions holomorphes : en fait c'est presque la « même chose ».
- Dès qu'une fonction est holomorphe, 1 fois dérivable par définition, elle est en fait analytique donc une infinité de fois dérivable ! C'est un petit miracle de l'analyse complexe. Remarquer que c'est faux pour les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- La formule de Cauchy dit qu'on peut reconstruire une fonction holomorphe f dans tout Δ en ne connaissant que f sur le bord $\partial\Delta = \gamma$ (exo à comprendre à partir de la formule). C'est remarquable et important en physique : des mesures surfaciques d'une grandeur holomorphe suffisent à connaître la grandeur à l'intérieur (non forcément accessible à la mesure). Là aussi, c'est faux pour des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: si l'on connaît une fonction (même C^∞) au bord d'un intervalle, on ne la connaît pas dans tout l'intervalle.
- exo Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$

$$I = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i f(a)$$

$$J = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz = 2\pi i f'(a)$$

$$K = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-b}\,dz = 0$$



8. Singularités et résidus d'une fonction holomorphe

Définition 11 (Singularités d'une fonction holomorphe)

Supposons que f soit holomorphe sur $\Omega \backslash A$ où $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Un point $a \in A$ est appelé point singulier de f. On peut les classer en 3 catégories :

1. *Singularité artificielle ou éliminable si $\lim_{z \to a} f(z) = \ell \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, en prolongeant par continuité f en a par $f(a) = \ell$, la fonction f devient holomorphe en a.* [a]
2. *Pôle d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si $\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) = \ell \neq 0$. $k \neq 0$ est alors unique.* [b]
3. *Singularité essentielle sinon.*

---

a. on comprend alors l'appelation « artificielle » ou « éliminable ».

b. $\boxed{\text{exo}}$ Pour un pôle d'ordre k, si $k' > k$ alors $\lim_{z \to a} (z-a)^{k'} f(z) = 0$, et si $k' < k$ alors $|(z-a)^{k'} f(z)|$ est non borné au voisinage de a.

<u>À retenir</u> : les singularités artificielles ne sont pas des singularités en réalité (c'était un défaut de connaissance de la fonction en a qui le faisait croire) et les singularités essentielles sont délicates à traiter (et ne seront pas étudiées ici). Ce qui va nous intéresser dans la suite, ce sont les pôles.

Exercices corrigés

1. $\boxed{0 \text{ est une singularité artificielle de } f(z) = \frac{\sin z}{z}.}$

   $\frac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ et $\lim_{z\to 0} f(z) = 1$ ➪ 0 est singularité artificielle et $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
   On pouvait le voir sur le développement en série entière de $\sin$ (cf. page 15) :

   $$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ ➪ } \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} \text{ avec } R = +\infty$$

2. $\boxed{\frac{1}{z^3-2iz^2-z} \text{ a } 0 \text{ pour pôle d'ordre 1 et } i \text{ pour pôle d'ordre 2.}}$

   $f(z) = \frac{1}{z^3-2iz^2-z} = \frac{1}{z(z-i)^2}$ donc $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0, i\})$.
   $(z-0)^{1} f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} \underset{z\to 0}{\longrightarrow} -1 \neq 0$ ➪ 0 pôle d'ordre 1.
   $(z-i)^{2} f(z) = \frac{1}{z} \underset{z\to i}{\longrightarrow} -i \neq 0$ ➪ i pôle d'ordre 2.

3. $\boxed{0 \text{ est singularité essentielle de } e^{1/z^2}.}$

   $f(z) = e^{1/z^2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $x^k e^{1/x^2} \underset{x\in\mathbb{R}, x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ donc $z^k e^{1/z^2}$ est non borné au voisinage de 0 donc 0 ne peut être ni une singularité éliminable, ni un pôle ➪ 0 singularité essentielle.

Définition 12 (Résidu)

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$ *avec un pôle d'ordre* k *en* a. *Alors* $g(z) := (z-a)^k f(z) \in \mathcal{H}(\Omega)$ [a] *donc* g *est développable en série entière au voisinage de* a *:*

$$(z-a)^k f(z) = g(z) = c_0 + c_1(z-a) + \cdots + c_{k-1}(z-a)^{k-1} + c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

En divisant par $(z-a)^k$ *on obtient le développement en série de Laurent* [b] *de* f

$$f(z) = \underbrace{\frac{c_0}{(z-a)^k} + \frac{c_1}{(z-a)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{k-1}}{z-a}}_{\text{partie singulière}} + \underbrace{c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots}_{\text{partie holomorphe (régulière)}} = \sum_{n=-k}^{+\infty} c_{n+k}(z-a)^n$$

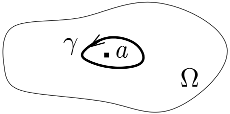
Le coefficient c_{k-1} *est appelé résidu de* f *en* a *et on note* $\boxed{c_{k-1} = \text{Rés}(f, a).}$

---

a. par déf. du pôle, $\lim_{z \to a} g(z)$ existe dans $\mathbb{C}$ donc la singularité a est éliminable pour g.

b. Pierre Alphonse Laurent (1813–1854) ingénieur militaire et mathématicien français.

Quel est l'intérêt de considérer c_{k-1} ?



Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$, a pôle d'ordre k.
Soit γ un chemin de Ω orienté positivement entourant a.

Alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ n'est pas forcément nulle car le théorème de Cauchy ne s'applique pas.[18] On a[19] :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \underbrace{\int_\gamma \frac{c_0}{(z-a)^k}\,dz + \cdots + \int_\gamma \frac{c_{k-2}}{(z-a)^2}\,dz}_{\substack{\text{tous les termes sont nuls} \\ \text{par ❷ page 26}}} + \underbrace{\int_\gamma \frac{c_{k-1}}{z-a}\,dz}_{\substack{= 2\pi i\, c_{k-1} \\ \text{par ❷ page 26}}} + \underbrace{\int_\gamma \text{partie holomorphe}}_{\substack{=0 \\ \text{par Théorème de Cauchy}}} .$$

Finalement on trouve $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, c_{k-1} = 2\pi i\, \text{Rés}(f, a)$.

Le coefficient c_{k-1} est exactement le terme résiduel dû au pôle a (sans ce pôle, l'intégrale serait nulle par le théorème de Cauchy).

---

18. γ est le bord d'un compact à bord $\Delta \subset \Omega$ mais f non holomorphe en $a \in \Delta$.

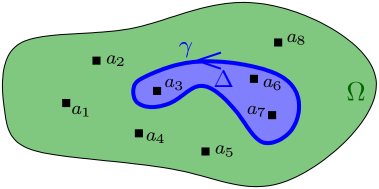
19. il faut justifier le calcul, en particulier que l'on peut intervertir $\displaystyle\int_\gamma \sum_{n=-k}^{+\infty} (\cdots) = \sum_{n=-k}^{+\infty} \int_\gamma (\cdots)$.

Le calcul précédent se généralise au cas de plusieurs pôles pour donner

Théorème 11 (Formule des résidus)

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$ où $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_\kappa\}$, a_j pôle d'ordre k_j. Soit γ un chemin de Ω orienté positivement tel que $\gamma \cap A = \emptyset$ et délimitant un compact à bord Δ. Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a_j \in A \cap \Delta} \text{Rés}(f, a_j).$$



$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i(\text{Rés}(f, a_3) + \text{Rés}(f, a_6) + \text{Rés}(f, a_7))$$

Remarque : c'est une généralisation du théorème de Cauchy à des fonctions holomorphes avec singularités de type **pôles**.

Calcul des résidus

Pour calculer Rés(f, a), on utilise en général le développement en série entière de la fonction $g(z) = (z-a)^k f(z)$ au voisinage de a [20] comme dans la Définition 12. Remarquer qu'il suffit en fait de faire un développement limité à l'ordre $k-1$ en a pour un pôle d'ordre k.

On connaît les coefficients du DSE, cf Théorème 10, ce qui donne une formule pour le résidu, $\boxed{\text{Rés}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!}\left((z-a)^k f(z)\right)^{(k-1)}|_{z=a}}$ si a pôle d'ordre k.

Elle est peu utile en pratique car il faut dériver $k-1$ fois une fonction, sauf quand $k=1$ car alors $\boxed{\text{Rés}(f,a) = ((z-a)f(z))\,|_{z=a}}$ [21]

exo

1. Rés$(\frac{1}{z^2+1}, i) = -\frac{i}{2}$, Rés$(\frac{1}{z^2+1}, -i) = \frac{i}{2}$
2. Rés$(\frac{1}{(z-i)^2(z+2)}, -2) = \frac{3}{25} - \frac{4i}{25}$, Rés$(\frac{1}{(z-i)^2(z+2)}, i) = -\frac{3}{25} + \frac{4i}{25}$
3. Rés$(\frac{1}{(z^2+1)^3}, i) = -\frac{3i}{16}$.

20. ⚠ Bien faire le développement par rapport à $(z-a)$ et non pas en 0.
21. il suffit d'évaluer la fonction $g(z) = (z-a)f(z)$, qui n'est plus singulière, au point $z=a$.

9. Calcul d'intégrales avec la formule des résidus

La formule des résidus permet de calculer des intégrales compliquées en ne calculant que des résidus ce qui est technique mais élementaire dès qu'on sait développer en série entière « $f\times$polynôme ». Deux cas typiques seront à connaître.

9.1. Fractions rationnelles en $\cos$ et $\sin$

But: Calculer $\boxed{I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt}$ avec $R(X,Y) = \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$, P, Q polynômes[22].

Méthode : Soit $f(z) := R(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1}))\frac{1}{iz}$ holomorphe sauf en un nombre fini de pôles (exo). On suppose que les pôles ne sont pas sur le cercle trigonométrique $C(0,1)$.

Par la formule des résidus, $\displaystyle\int_{C(0,1)^+} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{pôles } a_j \text{ de } f \\ \text{dans } D(0,1)}} \text{Rés}(f, a_j)$

En calculant la même intégrale à l'aide de la définition, on obtient :

$$\int_{C(0,1)^+} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it})ie^{it}\,dt \underbrace{=}_{\text{par choix de } f \text{ exo}} I \quad ➩ \quad \boxed{I = 2\pi i \sum_{\substack{\text{pôles } a_j \text{ de } f \\ \text{dans } D(0,1)}} \text{Rés}(f, a_j)}$$

22. c'est-à-dire des sommes et produits de X, Y et de constantes.

Exercices sur le cas 1

1. $$\boxed{I_r = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{r^2 - 2r\cos(t) + 1} = \frac{2\pi}{1-r^2} \text{ pour } r \in \mathbb{R},\ |r| < 1.}$$

   $f(z) = \frac{1}{r^2 - 2r\frac{z+z^{-1}}{2} + 1}\frac{1}{iz} = \frac{i}{r(z^2 - (r+\frac{1}{r})z + 1)} = \frac{i}{r(z-r)(z-\frac{1}{r})}$

   f a deux pôles d'ordre 1, r et $\frac{1}{r}$. Comme $|r| < 1$, $r \in D(0,1)$ et $\frac{1}{r} \notin D(0,1)$.

   Il suit $I_r = \int_{C(0,1)^+} f(z)dz = 2\pi i\,\text{Rés}(f,r) = 2\pi i\,(z-r)f(z)|_{z=r} = \frac{2\pi}{1-r^2}$.

   On a calculé l'intégrale du noyau de Poisson [a] le long du cercle.

2. $$\boxed{J = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+2i\sin(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}}, \quad \boxed{K = \int_0^{2\pi} \frac{2\,d\theta}{1+4\sin^2(\theta)} = \frac{4\pi}{\sqrt{5}}}$$

   $f(z) = \frac{1}{1+2i\frac{z-z^{-1}}{2i}}\frac{1}{iz} = \frac{-i}{(z+\frac{1+\sqrt{5}}{2})(z+\frac{1-\sqrt{5}}{2})}$ et le seul pôle de f dans $D(0,1)$ est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ donc $J = 2\pi i\,\text{Rés}(f, \frac{\sqrt{5}-1}{2}) = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}$.

   Le conjugué $\overline{J} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2i\sin(\theta)}$ est aussi égal à $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$ car $J \in \mathbb{R}$.

   Donc $K = J + \overline{J} = 4\pi/\sqrt{5}$.

---

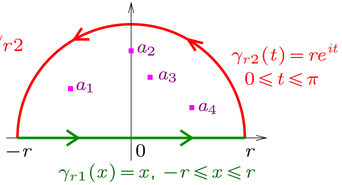
a. Siméon Denis Poisson (1781–1840) est un mathématicien et physicien français. L'institut de mathématiques et de physique théorique d'Orléans-Tours porte son nom.

9.2. Fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$

But : $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx \text{ ou } \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}\,dx}$, $\begin{cases} R = \frac{P}{Q} \text{ fraction rationnelle } \underline{\text{sans pôles réels}} \\ \deg(R) = \deg(\frac{P}{Q}) = \deg(P) - \deg(Q) \underline{\leqslant -2} \end{cases}$

exo $R \in L^1(\mathbb{R})$ donc I est bien définie.

Méthode : on considère le contour $\gamma_r = \gamma_{r1} \cup \gamma_{r2}$



Comme les pôles de R sont en nombre fini
et pas sur l'axe réel, pour r assez grand,
γ_r entoure tous les pôles au-dessus de l'axe réel
donc, par la formule des résidus,

$$\int_{\gamma_r} R(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{\text{pôles } a_j \text{ de } R \\ \text{tels que } \mathrm{Im}(a_j) > 0}} \text{Rés}(R, a_j)$$

➪ quantité indépendante de r grand (exo)

D'autre part $\displaystyle\int_{\gamma_r} R(z)dz = \int_{\gamma_{r1}} R(z)dz + \int_{\gamma_{r2}} R(z)dz = \underbrace{\int_{-r}^{r} R(x)\,dx}_{\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} I \text{ exo}} + \underbrace{\int_0^{\pi} R(re^{it})ire^{it}\,dt}_{\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ exo}}$

$r \to +\infty$ ➪ $\boxed{I = 2\pi i \displaystyle\sum_{\substack{\text{pôles } a_j \text{ de } R \\ \text{tels que } \mathrm{Im}(a_j) > 0}} \text{Rés}(R, a_j)}$

Remarques sur le cas 2

1. Le fait que l'intégrale sur le demi-cercle tende vers 0 quand r devient grand (« à l'horizon ») fait appel à un Lemme de Jordan [23]. On calculera la limite dans l'exercice 1 page 42.

2. Cette méthode fonctionne aussi pour calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{i\alpha x}\,dx$ si $\alpha \geqslant 0$, et par suite ses parties réelle et imaginaire $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos(\alpha x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin(\alpha x)\,dx$.

3. La méthode s'étend quand la fraction rationnelle R est de <u>degré -1</u>.

   ⚠Dans ce cas, $R \notin L^1(\mathbb{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{ix}\,dx$ est seulement semi-convergente (au sens des intégrales généralisées de 2A). Le lemme de Jordan correspondant est plus compliqué.

23. Camille Jordan (1838–1922) est un mathématicien français. L'institut de mathématiques de Lyon porte son nom.

Exercices sur le cas 2

1. $\boxed{I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}}$

   La fraction rationnelle $R(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3} = \frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}$ a deux pôles d'ordre 3, i et $-i$ et aucun des deux n'est réel. Le seul au-dessus de l'axe réel est i. De plus $\deg(R) = -6 \leqslant -2$. On peut donc appliquer la méthode du cas 2 de la page 40 qui donne $I = 2\pi i \,\text{Rés}(\frac{1}{(1+z^2)^3}, i) = 2\pi i(-\frac{3i}{16}) = \frac{3\pi}{8}$ (le résidu a été calculé page 37).

   Démontrons que $\int_0^\pi R(re^{it}) ire^{it}\, dt \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ sans invoquer de lemme de Jordan.

   On prend $r > 1$ pour que le contour page 40 contienne le pôle i.

   On a $|R(re^{it})ire^{it}| = \frac{r}{|1+r^2e^{2it}|^3} \leqslant \frac{r}{(r^2-1)^3}$ car $|1 + r^2e^{2it}| \geqslant r^2 - 1$ par la 2ème inégalité triangulaire.

   D'où $\left|\int_0^\pi R(re^{it})ire^{it}\, dt\right| \leqslant \int_0^\pi |R(re^{it})ire^{it}|dt \leqslant \int_0^\pi \frac{r}{(r^2-1)^3}\, dt = \frac{\pi r}{(r^2-1)^3} \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

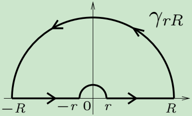
2. $\boxed{J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2-2x+2}\, dx = \frac{\pi\cos(1)}{e} + i\frac{\pi\sin(1)}{e}.}$

   La fraction rationnelle $R(z) = \frac{e^{iz}}{z^2-2z+2} = \frac{e^{iz}}{(z-1-i)(z-1+i)}$ est de degré -2 et a deux pôles d'ordre 1, $1+i$ et $1-i$ et seulement $1+i$ est au-dessus de l'axe réel.

   Donc $J = 2\pi i \,\text{Rés}(R, 1+i) = 2\pi i \frac{e^{iz}}{(z-1+i)}\big|_{z=1+i} = \frac{\pi\,\cos 1}{e} + i\frac{\pi\,\sin 1}{e}$.

Exercice corrigé : En utilisant le contour γ_{rR}, calculer

$$\boxed{I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}}, \quad \boxed{I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$



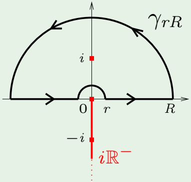
Ces intégrales ne relèvent ni du cas 1 ni du cas 2. Leur calcul n'est pas exigible.

$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)}, \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)} \in L^1([0,+\infty[)$ exo donc I_1 et I_2 sont bien définies.

On commence par définir un logarithme complexe $\log(z)$ sur $\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-)$ (comme demandé page 18) : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-)$, $\log(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{arg}(z)$ avec $\mathrm{arg}(z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Cela permet de définir une racine carrée holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-)$, $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log(z)}$.

Posons $f(z) = \frac{\log(z)}{\sqrt{z}(1+z^2)} = \frac{\ln|z| + i\,\mathrm{arg}(z)}{e^{\frac{1}{2}\ln|z| + \frac{i}{2}\mathrm{arg}(z)}(z-i)(z+i)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^- \cup \{i\}))$.

$\log(z), \sqrt{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^-))$, $1+z^2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $\sqrt{z}(1+z^2)$ s'annule en $0, -i, i$ et comme un quotient de fonctions holomorphes sur un ensemble est holomorphe sur l'ensemble excepté aux points où le dénominateur s'annule, on obtient que $f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^- \cup \{i\}))$.



L'intérêt d'avoir fait ceci est que le contour γ_{rR} est un chemin fermé inclus dans le domaine d'holomorphie $\mathbb{C}\backslash(i\mathbb{R}^- \cup \{i\})$ de f pour tous $0 < r < 1$ et $R > 1$. L'ensemble compact qu'il entoure contient comme point singulier de f seulement le pôle i d'ordre 1.

Exercice corrigé : suite

Par la formule des résidus, on obtient $\displaystyle\int_{\gamma_{rR}} f(z)dz = 2\pi i\,\text{Rés}(f,i)$.

Or, $\text{Rés}(f,i) = (z-i)f(z)|_{z=i} = \dfrac{\ln|i| + i\arg(i)}{e^{\frac{1}{2}\ln|i| + \frac{i}{2}\arg(i)}2i} = \dfrac{i\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{i\pi}{4}}2i} = \frac{\pi}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}$.

➪ $\displaystyle\int_{\gamma_{rR}} f(z)dz = \frac{\pi^2}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$.

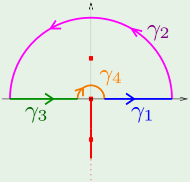
D'autre part, Γ_{rR} est la concaténation des 4 chemins :

$\gamma_1(t) = t,\ t\in[r,R]$,

$\gamma_2(t) = Re^{it},\ t\in[0,\pi]$,

$\gamma_3(t) = t,\ t\in[-R,-r]$,

$\gamma_4(t) = re^{i(\pi-t)},\ t\in[0,\pi]$.



❶ $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_r^R \frac{\ln(t)\,dt}{\sqrt{t}(1+t^2)} \underset{r\to 0,\ R\to+\infty}{\longrightarrow} I_1$,

❷ $\displaystyle\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{(\ln(R)+it)iRe^{it}}{\sqrt{R}e^{i\frac{t}{2}}(1+R^2e^{2it})}dt\right| \underset{\boxed{\text{exo}}}{\leqslant} \sqrt{R}\int_0^\pi \frac{\ln(R)+t}{R^2-1}dt \underset{\boxed{\text{exo}}}{\leqslant} \sqrt{R}\pi\frac{\ln(R)+\pi}{R^2-1} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Exercice corrigé : suite et fin

❸ $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{-R}^{-r} \frac{\ln|t|+i\,\mathrm{arg}(t)}{e^{\frac{1}{2}\ln(t)+\frac{i}{2}\mathrm{arg}(t)}(1+t^2)}\,dt = -i\int_r^R \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt + \pi\int_r^R \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,dt$

car $\mathrm{arg}(t) = \pi$ quand $t \in \mathbb{R}^-$.

➪ $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)dz \underset{r\to 0,\, R\to+\infty}{\longrightarrow} -iI_1 + \pi I_2,$

❹ par des calculs similaires à ceux de γ_2 (exo), $\displaystyle\left|\int_{\gamma_4} f(z)dz\right| \leqslant \sqrt{r}\pi\frac{|\ln(r)|+\pi}{1-r^2} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0.$

Finalement, $r \to 0$ et $R \to +\infty$

➪ $(1-i)I_1 + \pi I_2 = \frac{\pi^2}{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}} + i\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$

➪ $\boxed{I_1 = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}}$ et $\boxed{I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.}$