Outils d'analyse pour l'ingénieur
3EII, 3GMA, 3SGM, 3SRC

Chapitre 2 : Transformée de Fourier [1]

Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

Version novembre 2023

1. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) mathématicien, physicien et homme politique français. Scientifique extrêmement fécond, il introduit les séries qui portent son nom dans son traité « Théorie analytique de la chaleur » en 1822. Il est le premier à ébaucher une théorie de l'effet de serre. Les applications de la transformée de Fourier sont nombreuses : théorie du signal, compression des sons, traitement de l'image, téléphonie, etc. L'institut de mathématiques de l'université de Grenoble Alpes porte son nom.

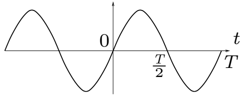
Introduction

Motivation : Analyse de signaux unidimensionnels $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & f(t) \end{array} \right.$

(musique, onde sismique, sonar, signal électrique, etc.)

On peut distinguer 3 types de signaux :

1. **Signal sinusoïdal pur** : $t \mapsto \sin(2\pi\lambda t)$
   Correspond à la propagation d'une onde pure
   λ fréquence (Hz, Hertz [2])
   $\omega = 2\pi\lambda$ pulsation (en s^{-1})
   $T = \frac{1}{\lambda}$ période (en s) ou longueur d'onde (en m)

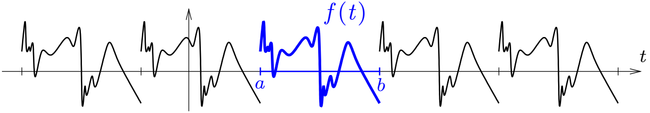


2. **Signaux périodiques** $\underbrace{\text{d'énergie finie}}_{f\in L^2([0,T])\Leftrightarrow\int_0^T |f(t)|^2\,dt<+\infty}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique
   Fourier (1822) : tout signal périodique d'énergie finie est superposition (d'un nombre infini) de signaux sinusoïdaux purs.
   ➪ Permet de représenter, transmettre, travailler avec ces signaux.

   En pratique, c'est la décomposition en séries de Fourier [3].

2. Unité de mesure de la féquence ; vient du physicien allemand Heinrich Hertz (1857–1894).
3. revoir le cours de 2A Séries de Fourier, Analyse 3.

Remarque : le cas périodique inclut les signaux finis $f \in L^2([a,b])$ car on peut « périodiser ».



3. **Signaux quelconques** $\underbrace{\text{d'énergie finie}}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$f \in L^2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$$

L'outil qui généralise les séries de Fourier du cas périodique est

$\boxed{\text{La Transformée de Fourier}}$

qui peut être vue comme :
« une somme (intégrale) de fonctions trigonométriques décrivant toutes les fréquences (qui varient maintenant continûment) ».

Le but de ce cours est l'étude de cette transformée [4].

4. Une référence précieuse est le livre Mathématiques pour le traitement du signal de Maïtine Bergounioux aux Éditions Dunod.

1. Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

On commence par définir la transformée de Fourier pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R})$ car c'est plus facile et on l'étendra ensuite à $L^2(\mathbb{R})$ (qui est l'espace « physique » des signaux d'énergie finie).

Définition 1 (Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$)

On définit l'application

$$\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^1(\mathbb{R}) & \to & C_0 = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ continues avec } \lim\limits_{\pm\infty} g = 0\} \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f) \text{ ou } \widehat{f} \end{array} \right.$$

définie par $\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt}$.

Remarques :

1. ⚠ Suivant les contextes ou disciplines, la définition peut varier à des constantes près.
2. En général, on utilise t ou x pour les variables des fonctions de départ f et la variable ξ (lettre grecque `xi`) pour les fonctions $\widehat{f}$ de l'espace d'arrivée.

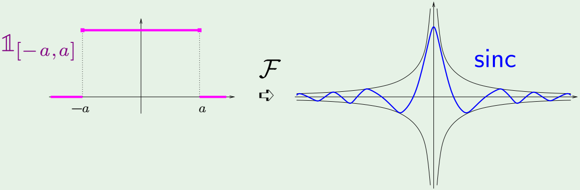
Exemple : Soit $a > 0$, $\boxed{\widehat{\mathbb{1}_{[-a,a]}}(\xi) = 2a\,\mathrm{sinc}(2\pi a\xi)}$

La transformée de Fourier du créneau est le sinus cardinal

Soit $f(t) = \mathbb{1}_{[-a,a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$f \in L^1(\mathbb{R})$ (exo). On calcule [a]

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-a,a]}(t) e^{-2i\pi\xi t}\,dt = \int_{-a}^{a} e^{-2i\pi\xi t}\,dt = \left[\frac{e^{-2i\pi\xi t}}{-2i\pi\xi}\right]_{-a}^{a}$$
$$= \frac{e^{2i\pi\xi a} - e^{-2i\pi\xi a}}{2i\pi\xi} = 2a\frac{\sin(2\pi a\xi)}{2\pi a\xi} = 2a\,\mathrm{sinc}(2\pi a\xi).$$



On gagne en régularité : discontinu ➪ très régulier

Voir page 14 pour une explication.

---

a. pour $\xi \neq 0$ puis on prolonge par continuité en $\xi = 0$.

Théorème 1 (Propriétés)

❶ *L'application* $\mathcal{F}$ *est bien définie, linéaire (continue) de* $L^1(\mathbb{R})$ *dans* $C_0(\mathbb{R})$.

❷ f *paire* ➪ $\widehat{f}$ *réelle (i.e.* $\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) \in \mathbb{R}$*)*
f *impaire* ➪ $\widehat{f}$ *imaginaire pure (i.e.* $\forall \xi \in \mathbb{R}, \mathrm{Re}(\widehat{f}(\xi)) = 0$*)*

❸ *(décalage en temps) si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $g(t) = f(t-\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$ *alors*
$\boxed{\widehat{g}(\xi) = e^{-2i\pi\xi\tau}\widehat{f}(\xi)}$ *(retard temporel* τ ➪ *décalage de phase* $\xi\tau$ *à la fréquence* ξ*)*

❹ *(chgt d'échelle) si* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $h(t) = f(\gamma t)$, $\gamma > 0$ *alors* $\boxed{\widehat{h}(\xi) = \frac{1}{\gamma}\widehat{f}(\frac{\xi}{\gamma})}$

❺ *(formule d'échange) si* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, *alors* $\boxed{\int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1}(t) f_2(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f_1(t)\widehat{f_2}(t)\, dt}$

❻ *(convolution) si* $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R})$, *alors* $\boxed{\widehat{f_1}(\xi) \cdot \widehat{f_2}(\xi) = \widehat{f_1 * f_2}(\xi)}$

❼ *(dérivation de la transformée de Fourier) Si* $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall 0 \le k \le n$
alors $\widehat{f} \in C^n(\mathbb{R})$ *et* $\boxed{\widehat{f}^{(k)}(\xi) = (-2i\pi)^k \widehat{t^k f}(\xi)}$.

❽ *(transformée de Fourier de la dérivée) Si* $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^n(\mathbb{R})$ *et* $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$
$\forall 0 \le k \le n$ *alors* $\boxed{\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (2i\pi\xi)^k \widehat{f}(\xi)}$.

Éléments de preuve du Théorème 1

❶ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)e^{-2i\pi\xi t}|\,dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt < +\infty$ si $f \in L^1(\mathbb{R})$ donc $\mathcal{F}$ bien définie sur $L^1(\mathbb{R})$.

Linéarité : facile, exo

$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$ (exo) donc $\widehat{f}(\xi)$ est borné. La preuve de $\lim\limits_{\xi\to\pm\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ est plus compliquée : exo⋆ traiter le cas où $f \in L^1(\mathbb{R})\cap C^1(\mathbb{R})$ et $f' \in C^1(\mathbb{R})$ (utiliser ❽).

❷
$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\xi t}\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-2i\pi\xi t}\,dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\xi t}\,dt$$
$$= \underbrace{-\int_{+\infty}^{0} f(u)e^{2i\pi\xi u}\,du}_{\text{chgt de variable } u=-t \text{ et parité de } f} + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-2i\pi\xi t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)2\cos(2\pi\xi t)\,dt$$

exo Faire de même dans le cas f impaire.

❸ et ❹ exo

❺ et ❻ exo⋆ Utilise le théorème de Fubini, voir [1] [4] page 48.

❼ exo⋆ Utilise le théorème de dérivation sous l'intégrale.

❽ exo⋆ voir [1] [4] page 48-49.

4. [1] Maïtine Bergounioux, Mathématiques pour le traitement du signal, Éditions Dunod, 2014.

Une application du Théorème 1 ❻ en traitement du signal

entrée $f(t) \longrightarrow \boxed{\text{système } L} \longrightarrow g(t)$ sortie, avec $g(t) = L(f(t))$

Si L est linéaire, indépendant du temps, $\underbrace{\text{invariant par translations en temps}}_{g(t-\tau)=L(f(t-\tau)),\forall\tau}$

alors on peut montrer que L se modélise avec un opérateur de convolution :

il existe h_L tel que $g = f * h_L \quad \underset{\text{Théorème 1 ❻}}{\Rightarrow} \quad \widehat{g} = \widehat{f} \cdot \widehat{h}_L$

Cela permet

- de déterminer le système si on connaît l'entrée et la sortie : $\widehat{h}_L = \dfrac{\widehat{g}}{\widehat{f}}$
- de déterminer la sortie si on connaît le système et l'entrée : $\widehat{g} = \widehat{f} \cdot \widehat{h}_L$

Cette méthode permet de calculer simplement la transformée de Fourier du système ou de la sortie. Il faut ensuite être capable de revenir au système ou à la sortie eux-mêmes : sera possible à l'aide des théorèmes d'inversion, cf p. 11 et 16.

Exercice corrigé : $\boxed{\forall a > 0,\ \widehat{e^{-ax^2}}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}}$ (à connaître)

La transformée de Fourier d'une gaussienne d'écart-type $\sigma = \frac{1}{\sqrt{a}}$ est encore une gaussienne d'écart-type $\sigma' = \frac{1}{\pi\sigma}$.

$f(x) = e^{-ax^2} \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$ (exo)

$f'(x) = -2axf(x) \quad \Rightarrow \quad \widehat{f'}(\xi) = -2a\, \widehat{xf}\,(\xi) \underset{\text{Théorème 1 ❼❽}}{\Rightarrow} (2i\pi\xi)\widehat{f} = \frac{-2a}{-2i\pi}\widehat{f}\,'$

On obtient une EDO linéaire du 1er ordre homogène pour $\widehat{f}$: $\widehat{f}\,' + \frac{2\pi^2}{a}\xi\widehat{f} = 0$

Solution : $\widehat{f}(\xi) = \lambda e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$, λ constante.

$$\lambda = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\frac{du}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \text{ car } \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}du = \sqrt{\pi} \text{ (cf. Chap. 1)}$$

d'où $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2}{a}\xi^2}$.

<u>Remarque</u> : on en déduit que le transformée de Fourier admet un point fixe[a], $\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$. C'est le seul avec la fonction nulle ($\widehat{0} = 0$).

a. c'est-à-dire une fonction qui est invariante par l'application $\mathcal{F}$.

Théorème d'inversion L^1

Il est naturel et utile de se demander si la transformée de Fourier admet une réciproque : cela ne peut pas être vrai en toute généralité car l'espace d'arrivée de $\mathcal{F}$ sur $L^1(\mathbb{R})$ est $C_0(\mathbb{R})$ qui n'est pas inclus dans $L^1(\mathbb{R})$. Mais si $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$, c'est vrai.

Théorème 2 (Théorème d'inversion dans $L^1(\mathbb{R})$)

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{\widehat{f}(\xi)}(t) = f(-t)$ p.p. ce qui peut s'écrire $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f$ p.p. avec $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.

Remarques :

1. Il n'est pas toujours facile de vérifier que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ donc le résultat est un peu restrictif. Cette restriction sera levée dans le cas de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ (cf. page 16).
2. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}$ alors $f = 0$ p.p. Comme $\mathcal{F}$ est linéaire, cela signifie que la transformée de Fourier est injective sur $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice : Si $\operatorname{Re} a > 0$ alors $\boxed{\widehat{e^{-a|t|}} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}}$ et $\boxed{\widehat{\frac{2a}{a^2+4\pi^2t^2}} = e^{-a|\xi|}}$

Si $\operatorname{Re} a > 0$ alors $e^{-a|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ (exo).

$$\widehat{e^{-a|t|}} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-2i\pi\xi t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-2i\pi\xi)t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+2i\pi\xi)t}\, dt$$

$= \left[\frac{e^{(a-2i\pi\xi)t}}{a-2i\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-(a+2i\pi\xi)t}}{-(a+2i\pi\xi)}\right]_{0}^{+\infty}$ car $\operatorname{Re} a \neq 0 \Rightarrow a \pm 2i\pi\xi \neq 0$ (exo)

$= \frac{1}{a-2i\pi\xi} + \frac{1}{a+2i\pi\xi}$ car $e^{\pm(a\mp 2i\pi\xi)t} \underset{t\to\mp\infty}{\longrightarrow} 0$ (exo)

$= \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$.

Comme $e^{-a|t|} \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{e^{-a|t|}} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2} \in L^1(\mathbb{R})$ (exo), on peut appliquer le Théorème 2 d'inversion : $\widehat{\widehat{e^{-a|t|}}(\xi)}(t) = e^{-a|-t|}$,

d'où $\widehat{\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}}(t) = e^{-a|t|}$.

2. Fonctions à décroissance rapide, transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

Nous avons vu que $L^1(\mathbb{R})$ n'était pas stable par la transformée de Fourier (si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on n'a pas nécessairement $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$). On commence par introduire un sous-ensemble de $L^1(\mathbb{R})$ qui est stable par $\mathcal{F}$.

Définition 2 (Fonctions à décroissance rapide)

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *est à décroissance rapide si* $\forall p \in \mathbb{N}, \ \lim_{t \to \pm\infty} |t^p f(t)| = 0.$

Exemples exo

e^{-t^2}, $\sin(t) e^{-|t|}$, $\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)$ sont à décroissance rapide.

Une fonction à décroissance rapide est une fonction qui tend très fortement vers 0 en $\pm\infty$ au sens que, même si on la multiplie par n'importe quel polynôme (qui peut tendre très vite vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$), elle continue à tendre vers 0.

Théorème 3 (Propriétés des fonctions à décroissance rapide)

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide, alors $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$.*
2. *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ est à décroissance rapide avec $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall k \in \mathbb{N}$, alors $\widehat{f}$ est à décroissance rapide.*

Á retenir :

1. Plus f décroît rapidement à l'∞, plus $\widehat{f}$ est régulière ;
2. Plus f est régulière, plus $\widehat{f}$ décroît rapidement à l'∞.

exo Illustrer ces principes sur les exemples déjà vus pages 6, 10 et 12.

Espace de Schwartz[5] et stabilité par transformée de Fourier

Définition 3 (Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$)

$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, f \in C^\infty(\mathbb{R})$ *et* f *et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide*$\}$.

Exemples exo

e^{-t^2}, $\underbrace{P(t)}_{\text{n'importe quel polynôme}} e^{-t^2}$ appartiennent à l'Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 4

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.
2. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est stable par dérivation et multiplication par un polynôme.*
3. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ $\quad$ $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *est stable par* $\mathcal{F}$

5. Laurent Schwartz (1915–2002) mathématicien et intellectuel engagé. Il fut le premier français lauréat de la médaille Fields en 1950 pour sa théorie des distributions.

Extension de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

En plus des propriétés précédentes, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est « dense » dans $L^2(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire que toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ peut être approchée aussi près que l'on veut par une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Cela permet de prolonger $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ($\subset L^1(\mathbb{R})$) à $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 5 (Théorème de Plancherel)

La transformée de Fourier se prolonge de manière unique en une isométrie bijective $\mathcal{F} : \left| \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \mathcal{F}(f) \end{array} \right.$ *vérifiant*

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(\xi)|^2 \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt \qquad \text{(Formule de Plancherel [a])}$$

a. Michel Plancherel (1885-1967) mathématicien suisse.

Remarques :

1. La transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$ est plus naturelle car l'espace de départ et celui d'arrivée sont maintenant $L^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}$ est bijective. La formule d'inversion ne nécessite aucune hypothèse [6] : si $f \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}(f) = f$ ou encore $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$.
2. Une isométrie conserve les longueurs. Ici ce sont les énergies qui sont conservées, c'est ce que dit la formule de Plancherel.

6. Comparer avec Théorème 2, page 11.

❸ ⚠ La contrepartie du travail sur $L^2(\mathbb{R})$ est qu'on n'a plus de formule simple pour définir $\mathcal{F}(f)$ comme dans le cas de $L^1(\mathbb{R})$, Définition 1 page 5. Les calculs ne seront pas directs (il faudra utiliser l'inversion ou d'autres techniques).

Exercice corrigé : Calculer $\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi)$

sinc n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$ [a] donc on ne peut pas calculer sa transformée de Fourier en utilisant la formule page 5. Mais $\mathrm{sinc} \in L^2(\mathbb{R})$ (exo) donc sa transformée de Fourier existe bien.

Pour la calculer, on utilise le théorème d'inversion L^2 page 16 :
On sait que $\widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}}(\xi) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sinc}(\xi)$, cf. page 6.

D'où, par le Théorème 5, $\widehat{\widehat{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}}}(t)(\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(-\xi) = \widehat{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{sinc}}(\xi)$.
Mais :

- $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(-\xi) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi)$ car $[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]$ est symétrique par rapport à 0 ;
- $\widehat{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{sinc}}(\xi) = \frac{1}{\pi}\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi)$ par linéarité de la transformée de Fourier.

On en conclut $\boxed{\widehat{\mathrm{sinc}}(\xi) = \pi\, \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\xi).}$

a. cf. Exercice 2 de TD relatif au chapitre 1.

3. Transformées de Fourier usuelles

$f : x \mapsto f(x)$	$\widehat{f} : \xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$
$\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x)$	$(\beta-\alpha)e^{-i(\alpha+\beta)\pi\xi}\mathrm{sinc}((\beta-\alpha)\pi\xi)$
$H(x)e^{-ax}$	$\frac{1}{a+2i\pi\xi}$
$H(-x)e^{ax}$	$\frac{-1}{-a+2i\pi\xi}$
$e^{-a\|x\|}$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\xi^2}$
$\mathrm{sgn}(x)e^{-a\|x\|}$	$\frac{-4i\pi\xi}{a^2+4\pi^2\xi^2}$
$H(x)\frac{x^k}{k!}e^{-ax}$	$\frac{1}{(a+2i\pi\xi)^{k+1}}$
$H(-x)\frac{x^k}{k!}e^{ax}$	$\frac{-1}{(-a+2i\pi\xi)^{k+1}}$
$\frac{1}{a+2i\pi x}$	$H(-\xi)e^{a\xi}$
$\frac{1}{a-2i\pi x}$	$H(\xi)e^{-a\xi}$
$e^{-\omega x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\omega}}e^{-\frac{\pi^2}{\omega}\xi^2}$
$\mathrm{sinc}(x)$	$\pi\,\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2\pi},\frac{1}{2\pi}]}(\xi)$

$a \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(a) > 0$
$k \in \mathbb{N}$
$\omega \in \mathbb{R}$ tel que $\omega > 0$

Fonction indicatrice de l'intervalle $[\alpha, \beta]$

$$\mathbb{1}_{[\alpha,\beta]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\alpha,\beta], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sinus cardinal

$$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Fonction d'Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonction signe

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

exo Démontrer les formules

4. Résolution d'équations différentielles

Historiquement, Joseph Fourier a introduit sa décomposition en séries pour résoudre l'équation aux dérivées partielles de la chaleur [7]. Plus généralement

- Les séries de Fourier sont bien adaptées pour résoudre certaines équations différentielles linéaires sur un segment fini (comme $[a, b]$) ;
- La transformée de Laplace [8] est adaptée à la résolution de certaines équations différentielles linéaires sur un domaine semi-infini (comme $[0, +\infty[$) ;
- La transformée de Fourier est adaptée à la résolution de certaines équations différentielles linéaires sur tout l'espace $\mathbb{R}$.

Nous allons illustrer la méthode dans le cas de la transformée de Fourier à travers un exemple de résolution d'EDO (équation différentielle ordinaire).

Principe :

$$\boxed{\text{EDO pour } f(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \boxed{\begin{array}{c}\text{équation}\\ \text{algébrique pour } \widehat{f}(\xi)\end{array}} \xrightarrow{\text{solution}} \boxed{\widehat{f}(\xi)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \boxed{\text{sol. } f(t) \text{ de EDO}}$$

7. Joseph Fourier, « Théorie analytique de la chaleur », 1822.
8. Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) mathématicien, physicien, astronome français, un des scientifiques les plus importants de l'époque.

Exercice corrigé : résoudre l'EDO $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = g(t)$ sur $\mathbb{R}$, où $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ est à dérivées bornées.

On cherche une solution f deux fois dérivable et dans $L^1(\mathbb{R})$ ainsi que ses dérivées.

En prenant la transformée de Fourier de l'EDO, on obtient par linéarité $\widehat{f''}(\xi) + 2\widehat{f'}(\xi) + \widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ sur $\mathbb{R}$.

Par Théorème 1 ❽, $\widehat{f''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2\widehat{f}(\xi)$ et $\widehat{f'} = (2i\pi\xi)\widehat{f}(\xi)$.
On aboutit à une équation algébrique pour $\widehat{f}$ qui se résout aisément, $((2i\pi\xi)^2 + 2(2i\pi\xi) + 1)\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)$ d'où $\boxed{\widehat{f}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+2\pi i\xi)^2}}$.[a]

Pour conclure, il suffit de revenir à f par inversion. Pour cela on remarque que $\frac{1}{(1+2\pi i\xi)^2} = \widehat{h}(\xi)$ avec $h(t) = H(t)te^{-t}$ (cf. page 18).
D'où $\widehat{f}(\xi) = \widehat{g}(\xi)\widehat{h}(\xi) = \widehat{g * h}(\xi)$ par Théorème 1 ❻ car $g, h \in L^1(\mathbb{R})$.

Par inversion dans L^1 [b], on obtient la solution de l'EDO de départ

$$\boxed{f(t) = g * h(t) = \int_{\mathbb{R}} g(t-s)H(s)se^{-s}\,ds.}$$

---

a. exo le dénominateur ne s'annule pas.

b. exo Montrer que $\widehat{g * h} = \widehat{g}\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$ car $\widehat{h} \in L^1(\mathbb{R})$.