Outils d'analyse pour l'ingénieur
3EII, 3GMA, 3SGM, 3SRC

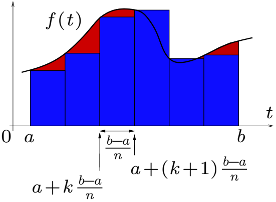
Chapitre 1 : Intégration

Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

1.1. Rappel [4] sur l'intégrale de Riemann [5]

Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est Riemann-intégrable et on peut définir

$$\int_a^b f(t)\,dt \underset{\text{Définition}}{=} \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n}\, f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)}_{\text{Somme de Riemann [1]}}$$



$$\underset{\substack{\text{Thm fondamental}\\ \text{de l'analyse [2]}}}{=} \quad F(b)-F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive [3] de } f \text{ sur } [a,b]$$

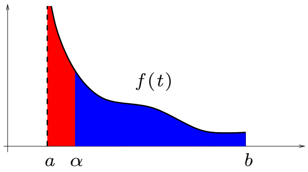
Remarque : La définition a un sens pour des fonctions plus générales, par exemple continues par morceaux. Mais on a besoin que la fonction soit suffisamment régulière pour utiliser cette notion d'intégrale.

1. Ici on utilise les rectangles à gauche et un pas constant mais d'autres choix sont possibles.
2. Théorème attribué historiquement à Isaac Newton (1642–1727).
3. définie à une constante près : $\forall t\in[a,b]$, $F(t)=\int_a^t f(s)\,ds+C$, $F\in C^1([a,b])$ et $F'=f$.
4. Revoir au besoin le cours de 1A.
5. Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), mathématicien allemand.

1.2. Rappel[6] sur les intégrales généralisées

Si f est continue sur $\underset{=}{]}a, b]$

et $\displaystyle \lim_{\alpha \to a^+} \underbrace{\int_\alpha^b f(t)\,dt}_{\substack{\text{intégrale de Riemann} \\ \text{car } f \text{ continue sur } [\alpha,\, b]}} = \ell \in]-\infty, +\infty[$ existe



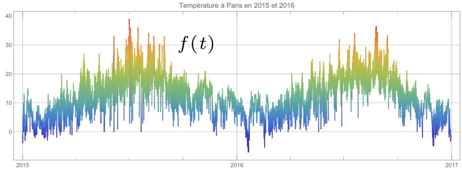
alors on définit $\displaystyle \int_a^b f(t)\,dt = \ell$.

Remarque : si f est seulement continue par morceaux sur $]a, b[$, on peut définir l'intégrale généralisée $\displaystyle \int_a^b f(t)\,dt$ si la limite $\displaystyle \lim_{\substack{\alpha \to a^+ \\ \beta \to b^-}} \int_\alpha^\beta f(t)\,dt$ existe et est finie.

6. Revoir au besoin le cours de 2A.

1.3. Objectif de ce cours

- Intégrer des fonctions très peu régulières.
- Intégrer sur des ensembles plus généraux que des intervalles.
- Pouvoir intégrer des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à plusieurs variables.[7]



Extrait de F.Vigneron, H.Bahouri, Analyse fréquentielle du signal, Images des Math., CNRS, 2019

C'est important pour les applications. **L'intégrale de Lebesgue**[8] répond à ces problématiques. Le but de ce cours est de donner une vague idée de cette nouvelle notion d'intégrale.

7. déjà possible avec les intégrales de Riemann multiples, cf. cours Géométrie 2A. Mais c'est compliqué.

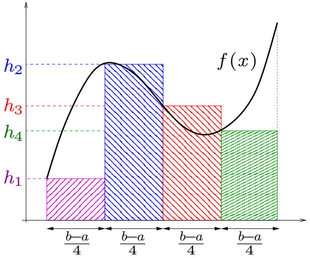
8. Henri Lebesgue (1875–1941), mathématicien français, principalement connu pour l'intégrale qui porte son nom et qui a révolutionné et généralisé le calcul intégral. Il a enseigné quelques années à Rennes où un centre de recherche en mathématiques porte son nom, le Centre Henri Lebesgue : `www.lebesgue.fr`

1. Introduction à l'intégration au sens de Lebesgue

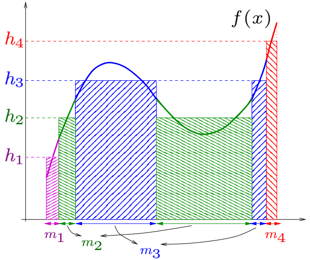
La théorie moderne de **l'intégrale de Lebesgue** permet de définir

$$\boxed{\int_A f(x)\,dx \quad \text{pour } A \subset \mathbb{R}^n \text{ « très général » et } f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \text{ « très générale ».}}$$

Elle est basée sur **la théorie de la mesure** au sens intuitif suivant :
L'intégration au sens de Riemann « parcourt » le segment $[a, b]$ de a à b et exploite au fur et à mesure la hauteur h de f (la taille des rectangles) alors que l'intégration au sens de Lebesgue exploite la mesure des ensembles de niveau $\{f = h\}$ (la mesure du sous-ensemble des x tels que $f(x) = h$).



Intégration au sens de Riemann



Intégration au sens de Lebesgue

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{4} h_1 + \frac{b-a}{4} h_2 + \frac{b-a}{4} h_3 + \frac{b-a}{4} h_4$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 + m_4 h_4$$

Voici comment Lebesgue lui-même décrit les choses de façon imagée :
« Imaginez que je doive payer une certaine somme ; je peux

- sortir les pièces de mon porte-monnaie comme elles viennent pour arriver à la somme indiquée (➪ intégrale de Riemann),
- ou sortir toutes les pièces et les choisir selon leur valeur (➪ intégrale de Lebesgue). »

Ainsi l'intégrale au sens de Lebesgue nécessite de **savoir mesurer** la taille d'ensembles dans $\mathbb{R}^n$ mais **s'affranchit de la régularité de la fonction** f à intégrer, alors que l'intégrale de Riemann est elle basée sur les variations de f et, de ce fait, plus dépendante de la régularité de f.

1.1. Notion de mesure

On veut construire une <u>mesure</u> m permettant de « mesurer »[9] le maximum d'ensembles de $\mathbb{R}^n$.

A minima, le cahier des charges doit comporter les propriétés suivantes :
(P1) m : {ensembles de $\mathbb{R}^n$} $\to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
(P2) $m([a,b]^n) = (b-a)^n$ (mesure des cubes de dimension n).
(P3) $m(A) \leq m(B)$ si $A \subset B$.
(P4) Si $A \cap B = \emptyset$, alors $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.
(P5) Pour tout vecteur x, $m(x + A) = m(A)$ (invariance par translation)

De façon surprenante, une telle mesure n'existe pas (elle ne peut pas être définie sur <u>tous</u> les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$) mais :

Théorème 1 (Mesure de Lebesgue)

Il existe une mesure λ_n sur $\mathbb{R}^n$ appelée mesure de Lebesgue qui permet de mesurer une grande classe d'ensembles, les ensembles dits Lebesgue-mesurables[a], et qui vérifie (P2)-(P3)-(P4)-(P5).

a. essentiellement tous ceux que vous connaissez

9. définir rigoureusement la longueur dans $\mathbb{R}^1$, l'aire dans $\mathbb{R}^2$, le volume dans $\mathbb{R}^3$, etc.

Remarques

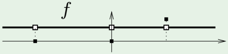
1. $\lambda_n(\mathbb{R}^n) = +\infty$ et $\lambda_n(\emptyset) = 0$ mais il existe des ensembles non-vides de mesure nulle appelés ensembles négligeables.
2. Dans $\mathbb{R}^1$: $\lambda_1(\{\text{nombre fini de points}\}) = 0$, $\lambda_1(\mathbb{Q}) = 0$.
   ➪ On dit qu'un ensemble fini de points dans $\mathbb{R}$ est un ensemble négligeable de $\mathbb{R}$.
3. Dans $\mathbb{R}^2$: $\lambda_2(\{\text{nb fini de points}\} \cup \{\text{nb fini de droites}\}) = 0$.
4. Dans $\mathbb{R}^3$: $\lambda_3(\{\text{nb fini points}\} \cup \{\text{nb fini droites}\} \cup \{\text{nb fini de plans}\}) = 0$.
5. (Exemple fondamental de mesure) La probabilité d'un événement est la mesure (de probabilité) des cas favorables parmi l'ensemble de tous les événements possibles (qui a pour mesure 1)
   ➪ cf. cours de Probas.

Définition 1 (Presque partout)

Soit A un ensemble mesurable. On dit qu'une propriété a lieu presque partout (en abrégé p.p.) si elle a lieu sur $A \setminus N$ où N est un ensemble négligeable (de mesure nulle).

Exemples

1. $f = 1$ p.p. sur $\mathbb{R}$



2. La fonction $\tan$ est continue p.p. sur $\mathbb{R}$ car elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus N$ où $N := \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$ est un ensemble dénombrable donc négligeable (exo tracer la fonction $\tan$).
3. La fonction de Dirichlet[a] $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ est nulle p.p. mais n'est pas continue p.p. (exo).
4. exo Soit $f_n(x) = (\sin x)^n$ pour $n \geq 1$. Étudier $\lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Identifier une fonction simple f telle que l'on puisse écrire $f_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} f(x)$ p.p. $x \in \mathbb{R}$.

a. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) mathématicien prussien.

1.2. Intégrale de Lebesgue

Théorème 2 (Intégrales des fonctions positives)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable et $f : A \to [0, +\infty]$ **positive** *et mesurable.* [a]

Alors on peut définir $\boxed{\int_A f(x)dx \in [0, +\infty]}$.

- *Cette intégrale* [b] *coïncide avec l'intégrale de Riemann quand f est continue par morceaux ;*
- *Linéarité :* $\int_A (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_A f(x)dx + \beta \int_A g(x)dx$ *(avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$)*

a. il suffit que tous les sous-ensemble de niveaux $L_\alpha := \{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, soient des ensembles mesurables. On admet que toutes les fonctions qu'on rencontrera sont mesurables.

b. ⚠ on utilise la même notation que pour l'intégrale de Riemann. À partir de maintenant, la notation $\int$ signifie intégrale de Lebesgue. Si une fonction est Riemann-intégrable mais pas Lebesgue-intégrable, il faudra le préciser (cf. exo 2 de TD)

Remarque : C'est un résultat disant qu'on sait intégrer les fonctions **positives**.

Théorème 3 (Intégrales des fonctions à valeurs réelles ou complexes)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ mesurable et $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) mesurable.

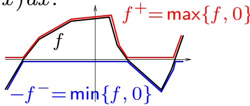
On dit que f est ***intégrable sur*** $A \iff \boxed{\int_A |f(x)|dx < +\infty}$ [a]

Dans ce cas, $\int_A f(x)dx \in \mathbb{R}$ *(ou $\mathbb{C}$) est bien définie* [b] *et on note* $\boxed{f \in L^1(A)}$.

a. $\int_A |f(x)|dx$ est bien définie par le Thm 2 car $x \mapsto |f(x)|$ est à valeurs dans $[0,+\infty]$ et est encore mesurable.

b. c'est-à-dire que c'est un nombre réel ou complexe qui n'est pas l'infini.

Remarque : Quand $f : A \to \mathbb{R}$, $\int_A f(x)dx = \int_A f^+(x)dx - \int_A f^-(x)dx$.



exo Donner la définition de $\int_A f(x)dx$ quand $f : A \to \mathbb{C}$.

À retenir

$L^1(A) = \{f : A \to \mathbb{C} : \int_A |f(x)|dx < +\infty\}$ fonctions **intégrables** sur A

$L^2(A) = \{f : A \to \mathbb{C} : \int_A |f(x)|^2 dx < +\infty\}$ fonctions de **carré intégrable** sur A

En pratique, à savoir faire

Vous devez être capables de déterminer si étant donnés une fonction f et un ensemble A[10], $\boxed{\text{est-ce que } f \in L^1(A) \text{ ? est-ce que } f \in L^2(A) \text{ ?}}$[11]

Montrer l'intégrabilité consistera en pratique à

<u>montrez que l'intégrale généralisée est **absolument convergente**</u>

en s'appuyant sur les **techniques** vues en 2ème année[12] :

1. Calcul direct de $\displaystyle\int_A |f(x)|dx$ (si c'est possible)
2. Théorème de comparaison (majorations, minorations)
3. Équivalents, DL
4. Changement de variables, Intégration par parties

10. Pour vous, tous les ensembles et toutes les fonctions seront supposées mesurables.
11. L'intérêt de considérer les fonctions de carré intégrable est, qu'en traitement du signal, L^2 est l'ensemble des signaux d'énergie finie.
12. Revoir le Chapitre Intégrales généralisées du cours d'Analyse 3 de 2A. Remarquer qu'on est dans le cas « simple » des fonctions positives.

Remarque : si deux fonctions sont égales presque partout (p.p.), alors leurs intégrales sont égales. Le p.p. est la bonne généralisation de la phrase : « on ne change pas la valeur d'une intégrale en modifiant la fonction qu'on intègre en un nombre fini de points ».

À démontrer en exo

1. $\frac{1}{t} \notin L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{t} \notin L^1([1,+\infty[), \in L^2([1,+\infty[),$
2. $\frac{1}{t^\alpha} \in L^1([0,1]) \Leftrightarrow \alpha < 1, \quad \frac{1}{t^\alpha} \in L^2([0,1]) \Leftrightarrow \alpha < \frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{t^\alpha} \in L^1([1,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha > 1, \quad \frac{1}{t^\alpha} \in L^2([1,+\infty[) \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{\sqrt{t}} \in L^1([0,1]), \notin L^2([0,1]),$
5. $\frac{1}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), \quad \frac{\sin t}{1+t^2} \in L^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}),$
6. $\frac{3t^5+1}{7t^6+5} \notin L^1(\mathbb{R}), \in L^2(\mathbb{R})$ (donc $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$),
7. $x^4 e^{-x} \in L^1([0,+\infty[), \in L^2([0,+\infty[), \notin L^1(]-\infty,0]), \notin L^2(]-\infty,0]),$
8. Trouver un exemple montrant que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.
9. ⚠ $f(t) = \frac{\sin t}{t} \notin L^1(\mathbb{R})$ alors qu'on a vu en 2A que l'intégrale généralisée $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge. Mais elle n'est pas absolument convergente ($\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt = +\infty$) donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Cf. Exo 2 de TD.

2. Stabilité et théorèmes de convergence

Problématique : $\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont « proches », a-t-on } \int_A f \text{ et } \int_A g \text{ proches ?}}$

C'est une propriété de stabilité fondamentale. Par exemple, si on se rappelle que $\int_{[t_0,t_1]} |f(t)|^2 dt$ modélise l'énergie du signal $f(t)$ sur $[t_0, t_1]$, on aimerait que, pour générer un signal $g(t)$ proche de $f(t)$, on ait besoin de la même énergie à peu de chose près.

Deux théorèmes importants permettent de répondre par l'affirmative à cette question,

- le Théorème de convergence monotone ou de Beppo-Levi [13]
- le Théorème de convergence dominée de Lebesgue [14].

13. Beppo Levi (1875–1961) est un mathématicien italien.
14. Ce théorème est dû à Lebesgue et constitue un des résultats les plus importants de sa théorie.

Convergence simple d'une suite de fonctions

On veut définir rigoureusement ce que l'on entend par « deux fonctions sont proches ». On va plutôt définir ce que signifie qu'une suite de fonctions (f_n) se rapproche d'une fonction f.

Définition 2

On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $f_n : A \to \mathbb{C}$. On dit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f si

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x) \ \underline{\text{pour presque tout } x \in A}.$$

On écrira $f_n \to f$ p.p. sur A.

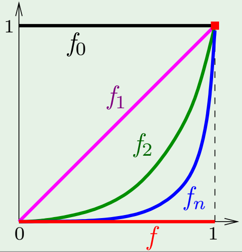
Exemple

Soit $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \geq 0$ et $x \in A := [0,1]$.

On a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

(Remarquer que pour chaque n, $f_n \in C^\infty([0,1])$ et que la limite f n'est même pas continue.)

On a donc que $f_n \to 0$ p.p. sur $[0,1]$.



Théorème 4 (Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ *mesurable et* $f_n : A \to [0, +\infty]$ *mesurables. On suppose*[a] *:*

- $f_n \to f$ *p.p. sur* A,
- *la suite* (f_n) *est croissante :* $f_n \le f_{n+1}$ *p.p. sur* A, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Alors $\displaystyle\int_A f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_A f(x)\,dx.$

a. Remarquer que le résultat s'applique aux fonctions positives et qu'on ne suppose aucune hypothèse d'intégrabilité, ni pour les f_n, ni pour f. En particulier, il est possible que $\int_A f(x)\,dx = +\infty$.

Théorème 5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ *mesurable et* $f_n : A \to \mathbb{C}$ *mesurables. On suppose :*

- $f_n \to f$ *p.p. sur* A,
- *(Domination)* $\exists g : A \to \mathbb{R}^+$ *intégrable*[a] *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \le g$ *p.p. sur* A.

Alors $\displaystyle\int_A f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\to} \int_A f(x)\,dx.$

a. La fonction g doit majorer tous les $|f_n|$ et être indépendante de n.

Exercice corrigé : Étudier $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx$.

Soit $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$ définie sur $A = [0, +\infty[$.

$f_n \to 0$ p.p. sur $[0, +\infty[$ (en fait partout sauf en $x = 0$).

$\forall n \geq 1$, $|f_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ p.p. $x \in [0, +\infty[$ et $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in L^1([0, +\infty[)$ (car d'une part, $|\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}| \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$ qui est intégrable en 0 et, d'autre part, pour $x \geq 1$, $|\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}| \leq e^{-x}$ qui est intégrable en $+\infty$). Finalement, l'hypothèse de domination est satisfaite.

Par le théorème de convergence dominée, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx \underset{n \to +\infty}{\to} \int_0^{+\infty} 0 \, dx = 0$.
(Le théorème donne l'existence de la limite et sa valeur.)

Exercice corrigé : Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t^2+2+\cos t}}$.

$\int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t^2+2+\cos t}} = \int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ avec $f_n(t) := \frac{\mathbb{1}_{[1,n]}(t)}{\sqrt{t^2+2+\cos t}}$ à valeurs positives [a].

$f_n(t) \to f(t) := \frac{1}{\sqrt{t^2+2+\cos t}}$ p.p. sur $[1,+\infty[$ (en fait partout ici).

La suite (f_n) est croissante car $\mathbb{1}_{[1,n]} \le \mathbb{1}_{[1,n+1]}$ et donc $f_n \le f_{n+1}$ pour tout n.

Par le théorème de convergence monotone,

$$\int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t^2+2+\cos t}} \underset{n\to+\infty}{\to} \int_1^{+\infty} f(t)\,dt = +\infty \text{ car } f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t} \notin L^1([1,+\infty[).$$

a. On rappelle que $\mathbb{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A \\ 0 & \text{si } t \notin A \end{cases}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble A.

Exercice corrigé : Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^\pi \left(\frac{1+\sin(nt)}{2}\right)^n dt$.

Les fonctions $f_n(x)=\left(\frac{1+\sin(nt)}{2}\right)^n$ sont définies sur $A=[0,\pi]$.

Comme $0\leq \frac{1+\sin(nt)}{2}\leq 1$ et que $\frac{1+\sin(nt)}{2}=1$ seulement pour un nombre fini de points de $[0,\pi]$ (ceux de l'ensemble $\{\frac{\pi}{2n}+\frac{2\pi\mathbb{Z}}{n}\}\cap[0,\pi]$), on a $0\leq \frac{1+\sin(nt)}{2}<1$ p.p. sur $[0,\pi]$ et donc $f_n\to 0$ p.p. sur $[0,\pi]$.

D''autre part, $|f_n(t)|\leq 1$ sur $[0,\pi]$ et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,\pi]$ [a] donc l'hypothèse de domination est satisfaite.

Par le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^\pi \left(\frac{1+\sin(nt)}{2}\right)^n dt \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^\pi 0\,dt = 0.$$

a. On remarquera que toute fonction bornée est intégrable sur tout ensemble A de mesure finie (un intervalle borné par exemple) mais n'est pas nécessairement intégrable sur tout l'ensemble $\mathbb{R}^n$. Ici $1\in L^1([0,\pi])$ mais $1\notin L^1(\mathbb{R})$.

Exercice corrigé : Étudier $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[n,n+1]} dt.$

Les fonctions $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ sont positives et définies sur $[0, +\infty[$.

$f_n \to 0$ p.p. sur A (car, $\forall t \in [0, +\infty[$, pour n assez grand, on a que $t \notin [n, n+1]$ donc $f_n(t) = 0$).

On remarque que la suite (f_n) n'est pas croissante (exo) et que l'hypothèse de domination ne peut pas être satisfaite (exo la seule fonction g qui peut dominer tous les $|f_n|$ est la fonction constante 1 et $1 \notin L^1([0, +\infty[)$. On ne peut donc utiliser ici ni le théorème de convergence monotone, ni le théorème de convergence dominée.

Heureusement, il est facile de calculer les intégrales,
$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[n,n+1]} dt = \int_n^{n+1} dt = 1 \underset{n\to+\infty}{\to} 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} 0 dt.$$

On remarque en particulier que la question posée page 15
n'a pas toujours de réponse positive.

Exercice corrigé : Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}\,dt.$

Les fonctions $f_n(x)=\mathbb{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}$ sont positives et définies sur $[0,+\infty[$.

$f_n\to 0$ p.p. sur A (car, $\forall t$, pour n assez grand, $t\notin[n,n+\frac{1}{n}]$ donc $f_n(t)=0$).

On remarque que la suite (f_n) n'est pas croissante (exo) et que l'hypothèse de domination ne peut pas être satisfaite (exo la seule fonction g qui peut dominer tous les $|f_n|$ est la fonction $g(t)=\mathbb{1}_{\cup_{n\geq 1}[n,n+\frac{1}{n}]}(t)$ et

$$\int_0^{+\infty}g(t)\,dt=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty \text{ donc } g\notin L^1([0,+\infty[).$$

On ne peut donc utiliser ici ni le théorème de convergence monotone, ni le théorème de convergence dominée.

Heureusement, il est facile de calculer les intégrales en jeu à la main,

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{1}_{[n,n+\frac{1}{n}]}\,dt=\int_n^{n+\frac{1}{n}}dt=\frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\to}0=\int_0^{+\infty}0\,dt.$$

On a donc une réponse affirmative à la question posée page 15 sans que le théorème de convergence monotone ou celui de convergence dominée s'applique.

3. Intégrales à paramètres

Il arrive souvent [15] que l'on définisse des fonctions à partir d'intégrales : si $f(t,x)$ est une fonction de 2 variables qu'on peut intégrer par rapport à la variable x, on peut définir une fonction de l'autre variable t par

$$F(t) = \int_A f(t,x)dx.$$

La question naturelle qui se pose est alors : si f est « régulière » par rapport à t, est-ce que cette régularité se transmet à la nouvelle fonction F ?

Une application importante du théorème de convergence dominée donne des résultats positifs très utiles en pratique :

- le Théorème de continuité sous l'intégrale,
- le Théorème de dérivation sous l'intégrale.

15. cf. la convolution dans la Section 5, la Transformée de Fourier dans le Chapitre 2, etc.

Théorème 6 (Théorème de continuité sous l'intégrale)

Soit $f : I \times A \to \mathbb{C}$ mesurable, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose

- *$t \mapsto f(t, x)$ est continue sur I pour p.p. $x \in A$,*
- *$|f(t, x)| \leq g(x)$ pour tous $t \in I$ et p.p. $x \in A$ avec $g \in L^1(A)$ (domination indépendante de t)*

Alors $F(t) = \displaystyle\int_A f(t, x)dx$ est continue sur I.

Théorème 7 (Théorème de dérivation sous l'intégrale)

Soit $f : I \times A \to \mathbb{C}$ mesurable, I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose

- *$\forall t \in I$, $x \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur A,*
- *$\forall t \in I$, $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)$ existe pour p.p. $x \in A$ ($\exists$ dérivée partielle en t)*
- *$|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)| \leq g(x)$ pour tous $t \in I$ et p.p. $x \in A$ avec $g \in L^1(A)$ (domination indépendante de t).*

Alors F est dérivable sur I et $F'(t) = \frac{d}{dt}\displaystyle\int_A f(t, x)dx = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dx$.

$\boxed{\text{exo}}$ Dans la formule ci-dessus, comprendre la différence d'utilisation de $\frac{d}{dt}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$.

Exercice corrigé : Soit $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\, dx$ pour $t \geq 0$ et $\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

1. Démontrer que $F'(t) = -2\mathcal{I}e^{-t^2}$ pour tout $t \in]0, +\infty[$.
2. Démontrer $\forall 0 \leq t \leq T$, $F(T) - F(t) = -2\mathcal{I} \int_t^T e^{-x^2}\, dx$.
3. Démontrer $F(t) = 2\mathcal{I} \int_t^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ et en déduire la valeur de $\mathcal{I}$.

1. Soit $f(t,x) = \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$ et $A = I =]0, +\infty[$.

Pour tout $t \in I$ fixé, $x \mapsto \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}$ est intégrable sur A. De plus $f \in C^\infty(I \times A)$ et, $\forall t \geq \varepsilon > 0$ et $\forall x \in A$, $|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)| = |-2te^{-t^2(1+x^2)}| \leq 2te^{-t^2} e^{-\varepsilon^2 x^2} \leq Me^{-\varepsilon^2 x^2}$ où $M = \sup_{t \in I} 2te^{-t^2} < +\infty$. Comme $Me^{-\varepsilon^2 x^2} \in L^1(A)$, toutes les hypothèses du Théorème de dérivation sous l'intégrale sont satisfaites.

On en déduit F est dérivable sur $]\varepsilon, +\infty[$ et

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} -2te^{-t^2(1+x^2)}\, dx = -2e^{-t^2} \int_0^{+\infty} e^{-(tx)^2} t dx = -2e^{-t^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du$$

(par le changement de variable $u = tx$).

On obtient bien la formule souhaitée sur $]\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc sur $I =]0, +\infty[$.

2. Il suffit d'intégrer l'égalité précédente entre t et T.

$$F(T) - F(t) = \int_t^T -2\mathcal{I}e^{-s^2}\, ds = -2\mathcal{I} \int_t^T e^{-x^2}\, dx.$$

Exercice corrigé : suite de la page 25

3. Par le théorème de convergence dominée, on obtient facilement (exo) que $F(T) \underset{T\to+\infty}{\to} 0$. En faisant tendre $T \to +\infty$ dans l'égalité obtenue à la question précédente, on obtient donc $F(t) = 2\mathcal{I}\int_t^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ et ceci est vrai $\forall t > 0$.

Par le Théorème de continuité sous l'intégrale, on montre que F est continue sur $[0, +\infty[$ (exo). On peut donc prendre $t = 0$ dans la formule ci-dessus pour obtenir

$$2\mathcal{I}^2 = F(0) = \int_0^{+\infty} \tfrac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \tfrac{\pi}{2} \text{ d'où } \boxed{\mathcal{I} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$ [a]

a. Formule à connaître.

4. Théorème de Fubini [16]

Théorème 8 (Théorème de Fubini)

Soit $A \subset \mathbb{R}^{n_1}$, $B \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *mesurables et* $f : \left| \begin{array}{ccc} A \times B & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array} \right.$ *mesurable.*

On a : $\int_A \int_B |f(x,y)| dydx < +\infty \iff \int_B \int_A |f(x,y)| dxdy < +\infty$

et dans ce cas, on a existence et égalité des intégrales

$$\int_A \int_B f(x,y)\, dydx = \int_B \int_A f(x,y)\, dxdy.$$

Ce théorème sert pour inverser l'ordre d'intégration. En pratique : on prend le module $|f|$ de la fonction et si, quand on intègre successivement par rapport aux 2 variables dans un des ordres, on trouve un résultat fini, alors on peut intégrer la fonction f et l'ordre n'a pas d'importance.

16. Guido Fubini (1879–1943) mathématicien italien.

Exercice corrigé : démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \ln 2.$

On remarque $\displaystyle\int_1^2\int_0^{+\infty} |e^{-xy}|\,dxdy = \int_1^2\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dxdy = \int_1^2 \frac{dy}{y} = \ln 2 < +\infty.$

Donc, d'après le théorème de Fubini, on obtient

$$\int_1^2\int_0^{+\infty} e^{-xy}\,dxdy = \int_0^{+\infty}\int_1^2 e^{-xy}\,dydx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}\,dx = \int_1^2 \frac{dy}{y} = \ln 2.$$

Exercice corrigé : démontrer que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

Par un changement en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\,dr\right)$$
$$= [\theta]_0^{2\pi}\,[-\tfrac{1}{2}\,e^{-r^2}]_0^{+\infty} = \pi.$$

En utilisant de nouveau le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

d'où la conclusion $\boxed{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.}$ [a]

---

a. Formule à connaître.

5. Produit de convolution

Définition 3 (Produit de convolution)

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *On définit la convolution de* f *et* g *comme la fonction* $f * g$ *définie par*

$$f * g\ (x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

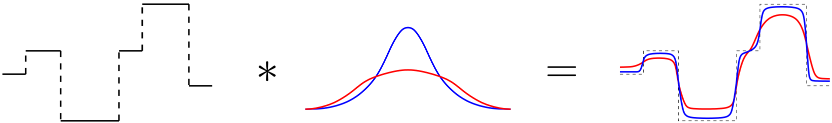
Théorème 9 (Propriétés de base de la convolution)

- *Si* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *alors* $f * g(x)$ *existe p.p.* $x \in \mathbb{R}$, $f * g$ *est bornée p.p. sur* $\mathbb{R}$ *et* $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *avec* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)|dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx.$
- *Si* $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ *alors* $f * g(x)$ *existe pour tous* $x \in \mathbb{R}$, $f * g$ *est continue sur* $\mathbb{R}$, $f * g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\to} 0$, *et* $|f * g(x)| \leq \sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx}\sqrt{\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx}.$
- *Quand* $f * g(x)$ *existe, on a* $f * g(x) = g * f(x)$.

Remarques :

1. exo Démontrer les 2 inégalités dans le Théorème 9. Pour la 2ème, on utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz[17].

2. L'opération de convolution a de nombreux intérêts qu'on verra dans le chapitre 2 Transformée de Fourier. Une des propriétés les plus importantes de la convolution est qu'elle permet de régulariser une fonction (ou un signal) f en le convolant avec une fonction g adéquate :



f

g, g gaussiennes d'écart type $\sigma < \sigma$

17. due à Augustin Louis Cauchy (1789–1857), mathématicien français, et Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), mathématicien allemand. Pour les intégrales, elle s'énonce ainsi : si $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\,dt \leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,dt}\sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2\,dt}$.