

TD Analyse 3Eii - gr B - 23 oct 2020

Exercice 14

Calculer intégrale le long d'un chemin
en appliquant la définition

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

↖ on paramètre $\gamma(t)$ pour $t_1 \leq t \leq t_2$

Exemple p26 n°3 dans le cours

Exercice 15

1) $f_1(z) = \frac{z}{z^2 + 2z - 3} = \frac{z}{(z-1)(z+3)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{1, -3\})$

[On cherche où la fonction est holomorphe.

Ensuite : pour chacun des points où elle ne l'est pas, on classifie la singularité : ① éliminable

Si on a un pôle $\rightarrow$ calcul des résidus en ce point

② pôles
③ singularité essentielle

Singularités : 1 et -3

1 pôle ordre 1 : $(z-1)^1 f_1(z) = \frac{z}{z+3} \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4} \neq 0$

$\text{Res}(f_1, 1) = (z-1)f_1(z) \Big|_{z=1} = \frac{1}{4}$

-3 pôle ordre 1 : $(z+3)^1 f_1(z) = \frac{z}{z-1} \xrightarrow{z \rightarrow -3} \frac{-3}{-3-1} = \frac{3}{4} \neq 0$
 $\text{Res}(f_1, -3/4)$

$f_3(z) = \frac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
 $f_3(z) = \frac{\sin z}{z} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$

$f_3(z) = \frac{\sin z}{z} \xrightarrow{z \rightarrow 0} 1$ existence d'une limite en $z=0$

$\hookrightarrow$ 0 singularité éliminable

$$f_2(z) = \frac{e^{i\pi z}}{(z+2)^3} \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-2\})$$

$$\left[\begin{aligned} e^0 &= e^{i2\pi} = e^{i4\pi} = \dots \\ &= e^{-i2\pi} = e^{-i4\pi} \\ &= \dots \end{aligned} \right]$$

-2 pôle ordre 3 : $(z - (-2))^{(3)} f_2(z) = e^{i\pi z} \xrightarrow{z \rightarrow -2} e^{i\pi(-2)} = 1 \neq 0$

$$g(z) = (z+2)^3 f_2(z) = C_0 + C_1(z+2)^1 + \boxed{C_2(z+2)^2 + C_3(z+2)^3} + \dots$$

$\hookrightarrow$ holomorphe en -2
 (-2 sing. éliminable pour g)

$\uparrow$ développer en série entière de g en -2

$\downarrow$ C_{3-1}
 " $\text{Res}(f_2, -2)$

Calcul de C_2

- $\xrightarrow{1}$ faire la DSE de g
- $\xrightarrow{2}$ faire un DL de g à l'ordre $k-1$
- $\xrightarrow{3}$ il existe des formules pour les C_k

$C_0 = \frac{g(-2)}{1}$

$\frac{g^{(k)}(-2)}{k!}$

$$e^{i\pi z} = e^{i\pi(\boxed{z+2} - 2)} = e^{i\pi\boxed{z+2}} e^{-2i\pi} = e^{i\pi\boxed{z+2}} \cdot 1$$

$$= 1 + \frac{i\pi(z+2)}{1!} + \frac{(i\pi(z+2))^2}{2!} + \frac{(i\pi(z+2))^3}{3!} + \dots$$

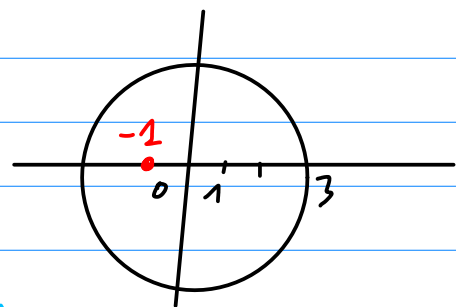
$$\boxed{e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}$$

$$= \underbrace{1}_{C_0} + \underbrace{i\pi}_{C_1} (z+2) + \boxed{\underbrace{\left(-\frac{\pi^2}{2}\right)}_{C_2} (z+2)^2} + \underbrace{\frac{-i\pi^3}{6}}_{C_3} (z+2)^3 + \dots$$

$= \text{Res}(f_2, -2)$

Exercice 16

$$I_2 = \int_{C^{+(0,3)}} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$



$\in H(\mathbb{C} \setminus \{-1\})$

-1 pôle ordre 4

formule des résidus

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}, -1\right) = 2\pi i \frac{4}{3} = \frac{8\pi i}{3e^2}$$

$$g(z) = (z+1)^4 \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} = e^{2z} = e^{2(z+1-1)} = e^{-2} e^{2(z+1)}$$

$$= e^{-2} \left(1 + \frac{2(z+1)}{1!} + \frac{(2(z+1))^2}{2!} + \frac{(2(z+1))^3}{3!} + \frac{(2(z+1))^4}{4!} + \dots \right)$$

$$e^{-2} \frac{8}{6} (z+1)^3$$

$$c_3 = \frac{4e^{-2}}{3} = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{2z}}{(z+1)^4}, -1\right)$$

$$I_4 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta + i \cos \theta}{5 + 4 \cos(\theta)} d\theta = 2\pi i \sum_{\substack{\text{tous les pôles} \\ \text{de } f(z) \text{ dans } D(0,1)}} \operatorname{Res}(f, a)$$

$R(\cos \theta, \sin \theta)$ avec $R(X, Y) = \frac{X + iY}{5 + 4X}$

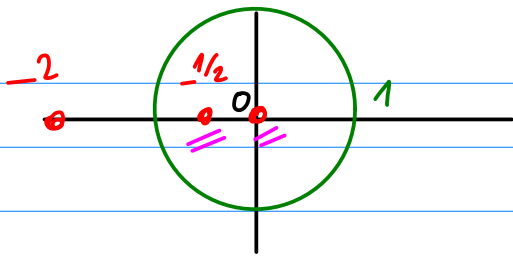
$$\underline{f(z)} = R\left(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1})\right) \frac{1}{iz} = \frac{\frac{1}{2}(z+z^{-1}) + \frac{1}{2i}(z-z^{-1})}{5 + \frac{1}{2}(z+z^{-1})} \times \frac{1}{iz}$$

$$= \dots \text{calcul} \dots = -\frac{1}{4} \frac{(1+i)z^2 - 1 + i}{3(z + \frac{1}{2})(z+2)}$$

$$I_4 = 2\pi i \left(\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -\frac{1}{2}) \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{i}{6} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$



$$I_6 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega x}}{x^2+1} dx \right)$$

$\pi e^{-\omega}$

Ces 2 du cours

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\omega x} dx$$

fraction rationnelle

pas de pôles réels

$$\deg = 0 - 2 = -2 \leq -2$$

$$R(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$$\in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{i, -i\})$$

$$\int_{\mathbb{R}} R(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum \text{Res}(R(z) e^{i\omega z}, a)$$

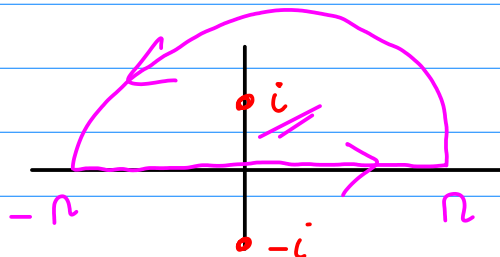
tous les pôles
a de $R(z) e^{i\omega z}$
qui sont au-dessus
de l'axe des réels

$$\parallel$$

$$2\pi i \text{Res}(f(z), i)$$

$$2\pi i \frac{e^{i\omega z}}{z+i} \Big|_{z=i} = 2\pi i \frac{e^{-\omega}}{2i}$$

$$= \pi e^{-\omega}$$



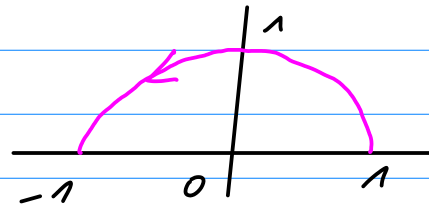
$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Exercice 14

$$dz = \gamma'(t) dt$$

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im}(z) dz$$

$\gamma = \text{demi-cercle} +$



$$\gamma(t) = e^{it}$$

$$0 \leq t \leq \pi$$

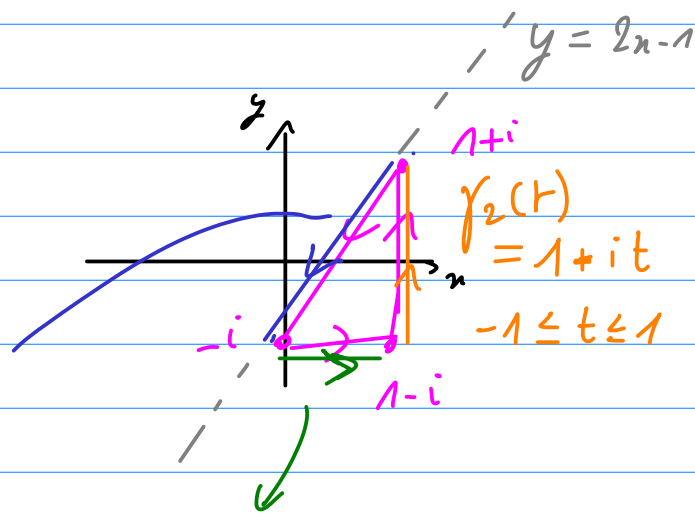
$$\gamma'(t) = i e^{it}$$

$$\int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{Im}(e^{it})}_{\sin t} i e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{\pi} \underbrace{\sin t}_{\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}} e^{it} dt = -\frac{\pi}{2}$$

• dernière question

$$\begin{aligned} \gamma_3(t) &= x(t) + i y(t) \\ &= x(t) + i(2^{n(t-1)}) \\ &= (1-t) + i(2^{n(1-t)-1}) \\ &0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$



$$\gamma_1(t) = t - i, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Au final la valeur de la 3ème intégrale est: +i