INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Analyse 3 – STPI – 2ème année

Chapitre 3 : Séries de Fourier

Olivier Ley
IRMAR, INSA de Rennes

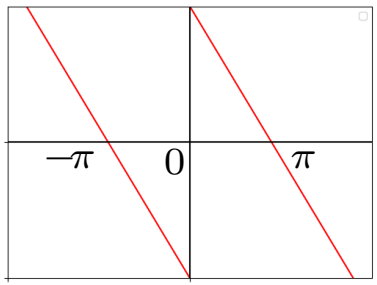
Introduction

Joseph Fourier [1] en 1822 : Toute fonction périodique se décompose en série de fonctions trigonométriques sinus et cosinus :

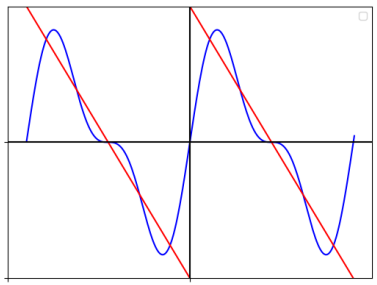
$$f(t) = S(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt$$

Dit autrement, Un signal périodique est la superposition de signaux sinusoïdaux.
C'est fondamental car :

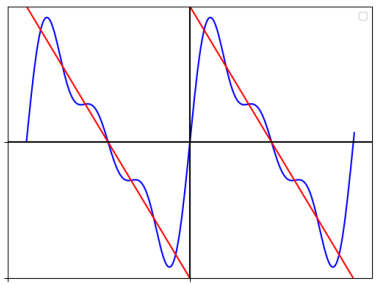
- Ramène la connaissance d'une fonction à la connaissance des coefficients de son développement en $\cos$ et $\sin$, les coefficients de Fourier a_n et b_n ; ce sont des **suites**, objets plus simples qu'une fonction. ➪ Application : numérisation des signaux.
- Permet des **calculs approchés** : $f(t) \approx S_N(f)(t)$ pour N grand.
- Dérivation de f facile à calculer : il suffit de dériver $\cos$ et $\sin$. Cela permet de **résoudre des équations différentielles**. ➪ résolution de l'équation de la chaleur.



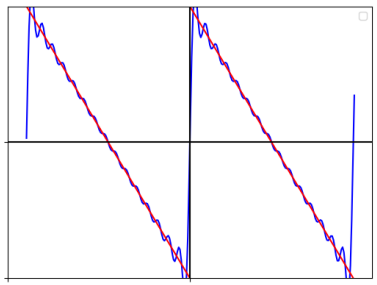
$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ sur $]0, \pi[$
2π-périodique



$S_2(f) = \sin t + \frac{\sin 2t}{2}$



$S_3(f) = \sin t + \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3}$



$S_{15}(f) = \sum_{n=0}^{15} \frac{\sin nt}{n}$

1. Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) mathématicien et physicien français. Il énonce sa décomposition dans son traité « Théorie analytique de la chaleur ».

Objectifs du cours

Savoir développer une fonction périodique en série de Fourier :

1. Calcul des coefficients et écriture de la série
2. Convergence de la série
3. La série de Fourier est-elle égale à la fonction de départ ?
4. Savoir utiliser l'égalité de Parseval [2]

2. Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836) mathématicien français, il consacre la fin de sa carrière à l'étude des fourmis.

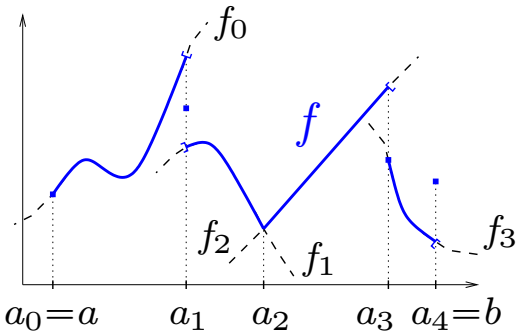
Sommaire

- Introduction
- 1 Définitions
- 2 Théorème de Dirichlet et égalité de Parseval
- 3 Forme complexe
- 4 Projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel des polynômes trigonométriques

1. Définitions : coefficients et série de Fourier

Rappel :

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-périodique si $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t+T) = f(t)$.
- $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux (respectivement C^1 par morceaux) s'il existe une subdivision finie $a_0 := a < a_1 < \cdots < a_N = b$ et des fonctions $f_0, f_1, \cdots, f_{N-1}$ continues sur $\mathbb{R}$ (respectivement C^1 sur $\mathbb{R}$)[3] telles que $\forall 0 \leqslant i \leqslant N-1$, $f = f_i$ sur $]a_i, a_{i+1}[$.



Définition 1 (coefficients et série de Fourier)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et continue par morceaux.

- *Coefficients de Fourier de f*

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\frac{2\pi n}{T}t)\,dt, \quad n \geqslant 0$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi n}{T}t)\,dt, \quad n \geqslant 1$$

- *Série de Fourier de f*

$$S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}t) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T}t).$$

3. il est important que f_i soit continue (respectivement C^1) sur un intervalle plus grand que $]a_i, a_{i+1}[$ (exo $1/x$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$).

Remarque : en pratique, on travaillera souvent avec une période $T = 2\pi$ ce qui donne

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, & n \geqslant 0 \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt, & n \geqslant 1 \end{cases} \qquad S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt).$$

Questions

1. La série de Fourier converge-t-elle ? [4]

$$S_N(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(\frac{2\pi n}{T}t) + b_n\sin(\frac{2\pi n}{T}t) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} S(f)(t) \ ?$$

2. En cas de convergence, a-t-on $S(f)(t) = f(t),\ \forall t \in \mathbb{R}$?

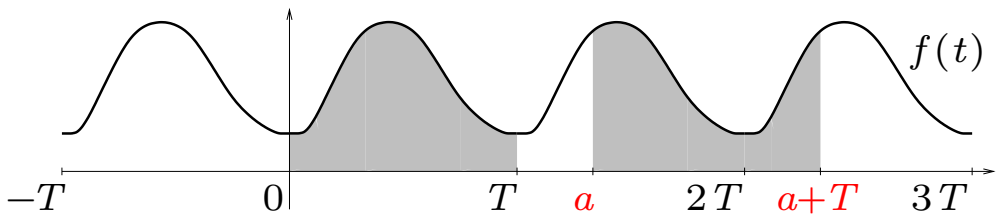
4. ⚠C'est en réalité une série de fonctions pour lesquelles, il faut définir une notion de convergence. Dans ce cours, on se restreindra à la convergence ponctuelle (convergence de la série numérique lorsque t est un paramètre fixé).

Théorème 1

1. *Si f est T-périodique alors* $\displaystyle\int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt,\ \forall a \in \mathbb{R}.$
2. *Si f est paire alors* $b_n = 0,\ \forall n \geqslant 1.$
3. *Si f est impaire alors* $a_n = 0,\ \forall n \geqslant 0.$

Preuves :

1. exo



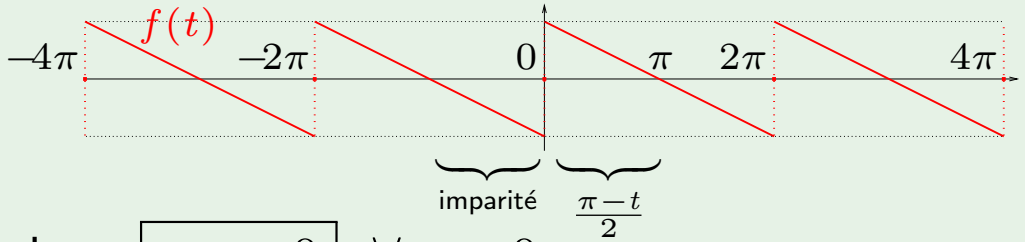
2. $\forall n \geqslant 1,\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(\frac{2\pi n}{T}t)\,dt \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{chgt var.}\\ s=-t\end{array}}}{=} \frac{2}{T}\int_0^{-T} \underbrace{f(-s)}_{=f(s)\ \text{par parité}} \underbrace{\sin(\frac{2\pi n}{T}(-s))}_{=-\sin(\frac{2n\pi}{T}(s))}(-ds)$

$$= -\frac{2}{T}\int_{-T}^0 f(s)\sin(\frac{2\pi n}{T}s)\,ds \underset{\text{1 avec } a=T}{=} = -b_n \quad \Rightarrow \quad b_n = 0 \qquad \square$$

3. exo

Exemple de l'introduction : $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi[$ impaire et 2π-périodique.

Faire un dessin si possible pour être sûr de bien comprendre comment f est définie :



f est impaire donc $\boxed{a_n = 0}$, $\forall n \geqslant 0$.

$$\forall n \geqslant 1, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt \underset{\substack{\text{Prop. 1 } ❶ \\ \text{avec } a=-\pi}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(t)\sin(nt)}_{\substack{\text{impaire}\times\text{impaire}=\text{paire}}}\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\frac{\pi - t}{2}}_{\substack{\text{valeur de } f \\ \text{sur }]0,\pi[}} \sin(nt)\,dt \underset{\substack{\text{Intégration} \\ \text{par parties}}}{=} \boxed{\frac{1}{n}}.$$

Donc $\boxed{S(f)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n}.}$

Remarque : si on change la valeur de $f(t)$ en un nombre fini de points, cela ne change pas les intégrales donc les coefficients et la série de Fourier sont inchangés.

2. Théorème de Dirichlet [5] et égalité de Parseval

Théorème 2 (Théorème de Dirichlet/convergence ponctuelle)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et C^1 par morceaux.

1. *La série de Fourier $S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{2\pi n}{T} t) + b_n \sin(\frac{2\pi n}{T} t)$ converge $\forall t \in \mathbb{R}$.*
2. $\forall t \in \mathbb{R}$, $S(f)(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$.
3. *Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $S(f)(t) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier converge normalement et la série numérique $\sum |a_n| + |b_n|$ converge.*

Théorème 3 (Inégalité de Bessel / Égalité de Parseval)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-périodique et continue par morceaux.

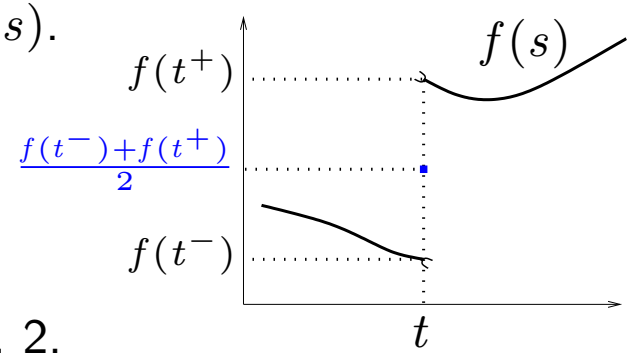
1. *Inégalité de Bessel [a] : $\forall N \in \mathbb{N}$, $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 + |b_n|^2 \leqslant \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$*
2. *Égalité de Parseval : $\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$*

a. Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) physicien, astronome, mathématicien allemand.

5. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) mathématicien prussien.

Remarques

1. Le Théorème 2 est important pour vous puisqu'il contient tout ce que vous devez savoir pour développer une fonction périodique en série de Fourier (DSF).
2. Rappel : $f(t^-) := \lim_{s \to t^-} f(s)$ et $f(t^+) := \lim_{s \to t^+} f(s)$.
   Si f est continue en t, $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} = f(t)$.
   Si f est discontinue en t, $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$ est la valeur moyenne sur le saut de discontinuité.



3. Comprendre Théorème 2 ❷ sur les simulations p. 2.
4. La notion de convergence normale du Théorème 2 ❸ est hors-programme.
5. Une conséquence de l'égalité de Parseval du Théorème 3 ❷ est que la série $\sum |a_n|^2 + |b_n|^2$ converge. On en déduit que $\boxed{a_n, b_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0}$.

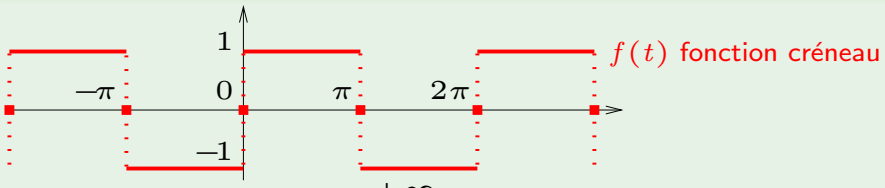
   ⚠ Cela ne suffit pas à entraîner la convergence de $\sum |a_n| + |b_n|$ (contre-exemple page 8). C'est cependant vrai si f est continue, cf. Théorème 2 ❸.

   De manière générale, retenir : plus la fonction f est régulière, plus vite les coefficients de Fourier a_n, b_n tendent vers 0 quand $n \to +\infty$.

   Ceci est bien sûr important numériquement pour le calcul approché de f à l'aide des sommes partielles de sa série de Fourier.
6. Deux fonctions périodiques continues par morceaux ont même série de Fourier $\Leftrightarrow$ elles sont égales sauf éventuellement aux points de discontinuité (exo⋆).

Exercice : Faire le DSF de $f(t)=1$ sur $]0,\pi[$, impaire, 2π-périodique avec $f(0)=f(\pi)=0$. En déduire $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

f est 2π-périodique, C^1 par morceaux et vérifie $f(t)=\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$, $\forall t\in\mathbb{R}$.



Par le théorème de Dirichlet, $\forall t\in\mathbb{R}$, $f(t)=S(f)(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$.

Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients de Fourier. Par imparité, $\boxed{\forall n\geqslant 0,\ a_n=0}$.

$\forall n\geqslant 1$, $b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1\cdot\sin(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}[-\frac{\cos(nt)}{n}]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$.

Donc $\boxed{b_n=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 & \text{si } n=2p \text{ pair}\\ \frac{4}{\pi(2p+1)} & \text{si } n=2p+1 \text{ impair}\end{cases}}$

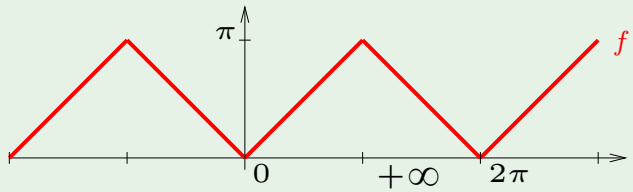
Finalement $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=S(f)(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)\sin(nt)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4\sin((2p+1)t)}{\pi(2p+1)}}$.

Par l'égalité de Parseval, $\sum_{n=1}^{+\infty}|b_n|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{\pi(2p+1)}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}1^2\,dt=2$.

D'où $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}}$.

Exercice : DSF de $f(t)=|t|$ sur $[-\pi,\pi]$, 2π-périodique et calculer $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$, $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}$.

f est 2π-périodique, C^1 par morceaux continue et paire.



Par le théorème de Dirichlet, $\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=S(f)(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos(nt)$.

Par parité, $\boxed{\forall n\geqslant 1,\ b_n=0.}$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}tdt=\pi$ ➪ $\boxed{a_0=\pi.}$ (calculer a_0 et a_n, $n\geqslant 1$, séparément).

$\forall n\geqslant 1,\ a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos(nt)dt=-\frac{2}{\pi n^2}(1-(-1)^n)$.

Finalement $\boxed{\forall n\geqslant 1,\ a_n=-\frac{2}{\pi n^2}(1-(-1)^n)=\begin{cases}0 & \text{si } n=2p \text{ pair}\\ -\frac{4}{\pi(2p+1)^2} & \text{si } n=2p+1 \text{ impair}\end{cases}}$

et $\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\ f(t)=S(f)(t)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)t)}{(2p+1)^2}.}$

En particulier, $f(0)=0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$ ➪ $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.}$

Égalité de Parseval : $\frac{\pi^2}{2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\left(-\frac{4}{\pi(2p+1)^2}\right)^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|^2dt=\frac{2\pi^2}{3}$ ➪ $\boxed{\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.}$

Retour sur : $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi[$ impaire et 2π-périodique (pages 2 et 8).

- Comme f de plus C^1 par morceaux, le théorème de Dirichlet s'applique et on a
$$S(f)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ (f \text{ est continue}), \\ \frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} & t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ (\text{point de discontinuité}). \end{cases}$$
La valeur de $S(f)$ aux points de discontinuité dépend de la définition de f en ces points (par exemple $S(f)(k\pi) = f(k\pi) = 0$ si on a pris $f(0) = f(\pi) = 0$).

- En appliquant l'égalité de Parseval, on obtient $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$

- Preuve de la convergence de la série de Fourier sans utiliser le théorème de Dirichlet : on utilise le théorème d'Abel (cf. Chapitre 2). On écrit $S(f)(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n v_n$ avec $a_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \sin(nt)$; la suite (a_n) est décroissante et tend vers 0. Il reste à prouver que les sommes partielles $V_N = \sum_{n=1}^{N} \sin(nt)$ sont bornées indépend. de N.

  On commence par calculer $\sum_{n=1}^{N} e^{int}$ (somme partielle d'une série géométrique) puis on prend la partie imaginaire.

Retour sur : $f(t) = \frac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi[$ impaire et 2π-périodique. (suite)

Tout d'abord, ne pas oublier de séparer le calcul pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ qui donne N et le calcul pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ qui donne

$$\sum_{n=1}^{N} e^{int} = e^{it}\frac{e^{iNt}-1}{e^{it}-1} = e^{it}\frac{e^{iNt/2}\left(e^{iNt/2}-e^{-iNt/2}\right)}{e^{it/2}\left(e^{it/2}-e^{-it/2}\right)} = e^{i(N+1)t/2}\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}.$$

D'où : $V_N = \sum_{n=1}^{N} \sin(nt) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \frac{\sin((N+1)t/2)\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$

Finalement $|V_N| \begin{cases} = 0 & \text{si } t \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \leqslant \frac{1}{|\sin(t/2)|} & \text{si } t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$ donc V_N est bornée pour tout t par une constante qui ne dépend pas de N.

On a donc vérifié les hypothèses du théorème d'Abel ce qui nous permet de conclure que $S(f)(t)$ converge.

3. Forme complexe des séries de Fourier

$$S(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\tfrac{2\pi n}{T} t) + b_n \sin(\tfrac{2\pi n}{T} t)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{e^{\frac{2\pi i n}{T} t} + e^{-\frac{2\pi i n}{T} t}}{2} + b_n \frac{e^{\frac{2\pi i n}{T} t} - e^{-\frac{2\pi i n}{T} t}}{2i} \text{ (formules d'Euler)}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - i b_n}{2} e^{\frac{2\pi i n}{T} t} + \frac{a_n + i b_n}{2} e^{-\frac{2\pi i n}{T} t}$$

Donc en posant : $c_0 = \frac{a_0}{2}$, et pour $n \geqslant 1$, $c_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2}$,
on obtient la forme complexe qui est plus synthétique et mieux adaptée au cas des fonctions à valeurs complexes.

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T} t} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2\pi i n}{T} t} f(t)\, dt.$$ [6]

Somme partielle : $S_N(f)(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{\frac{2\pi i n}{T} t}$.

Égalité de Parseval : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$.

6. ⚠ On somme sur $\mathbb{Z}$ maintenant.

Cas d'une période $T = 2\pi$

$$S(f)(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \text{ avec } \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int} f(t)\,dt.$$

Égalité de Parseval : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt.$

Exercices

1. exo Vérifier les formules encadrées page précédente et ci-dessus.
2. exo Vérifier que si f est à valeurs réelles, alors $c_{-n} = \overline{c_n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Si f est $\underline{C^1}$ et $\underline{T\text{-périodique}}$ et si $c_n(f)$ est le coefficient de Fourier de f et $c_n(f')$ celui de f', alors $\boxed{c_n(f') = \frac{2\pi in}{T} c_n(f).}$

   Tout d'abord, comme f est C^1 et T-périodique, f' est bien définie, est continue et est toujours T-périodique. Donc $c_n(f')$ est bien défini. Par intégration par parties :

   $$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{2\pi in}{T}t} f(t)\,dt = [-\frac{1}{2\pi in} f(t) e^{-\frac{2\pi in}{T}t}]_0^T + \frac{1}{2\pi in}\int_0^T e^{-\frac{2\pi in}{T}t} f'(t)\,dt$$
   $$= \frac{T}{2\pi in} c_n(f').$$

4. Projection orthogonale sur le sev des polynômes trigonométriques

Théorème 4

L'ensemble D_T des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont T-périodiques, continues par morceaux et qui vérifient $\frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+))$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

exo Démontrer le résultat.

Objectif :

Utiliser la structure d'espace vectoriel de D_T et s'inspirer des outils que l'on connaît sur les espaces vectoriels euclidiens (décomposition d'un vecteur dans une base, produit scalaire, norme d'un vecteur, projection, etc.) pour interpréter la décomposition en série de Fourier.

⚠ Ce n'est pas si simple car D_T est de dimension infinie alors que les espaces euclidiens, comme $\mathbb{R}^n$, sont de dimension finie.

Rappel sur l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension n

$x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ se décomposent dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$, $e_i = (0, \cdots, 0, \underset{i\text{ème}}{1}, 0, \cdots, 0)$, sous la forme $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$.

On définit un produit scalaire $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$

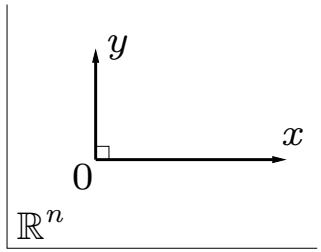
et la norme euclidienne associée $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

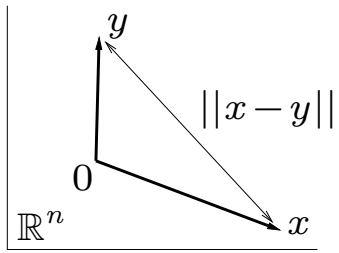
pour lesquels $\mathcal{E}$ est une base orthonormée (bon)

$$\begin{cases} \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad i \neq j & \Leftrightarrow e_i \perp e_j \text{ (orthogonalité)} \\ \langle e_i, e_i \rangle = 1 & \Leftrightarrow ||e_i||^2 = 1 \text{ (normé)} \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}^n$, on a donc

- une notion d'orthogonalité entre deux vecteurs : $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$,
- une notion de distance entre deux vecteurs : distance$(x, y) = ||x - y||$.



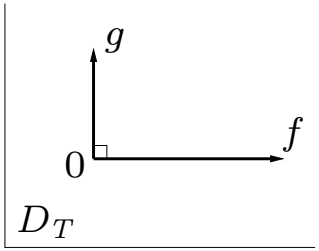


Extension à l'espace vectoriel D_T

- Produit scalaire : $\forall f, g \in D_T, \langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt$ ($\overline{z}$ est le conjugé de z)

  Permet de définir une notion d'orthogonalité entre deux fonctions :

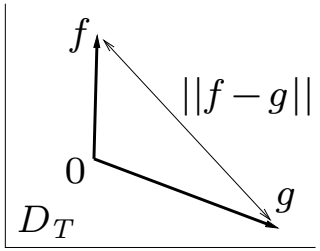
  $f \perp g \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0.$



- Norme : $\forall f \in D_T, ||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt}$ ($\overline{z}z = |z|^2$)

  Permet de définir une notion de distance entre deux fonctions :

  $\text{distance}(f, g) = ||f - g|| = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt}.$



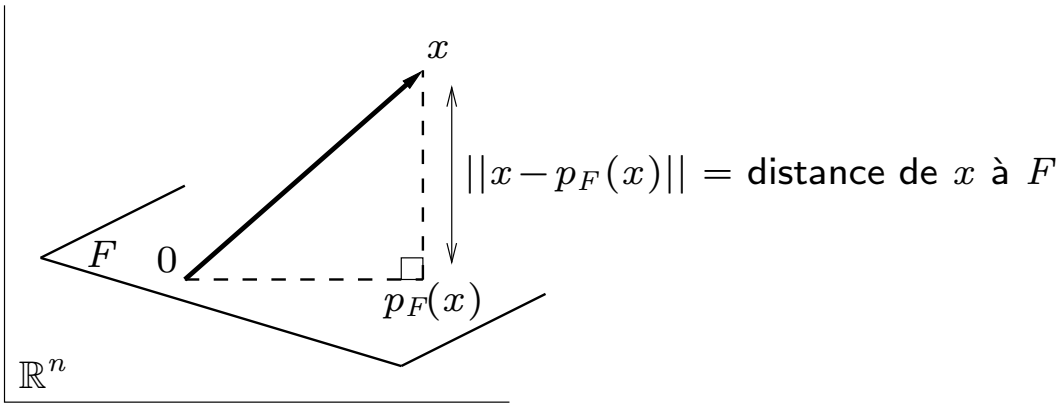
- La famille des polynômes trigonométriques $(e_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$, $e_n(t) = e^{\frac{2\pi i n}{T}t}$, est une famille orthonormale de D_T.

  Preuve : $\langle e_n, e_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{e^{\frac{2\pi i n}{T}t}} e^{\frac{2\pi i p}{T}t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{\frac{2\pi i (p-n)}{T}t} dt$

  $$= \begin{cases} 1 & \text{si } n = p, \\ 0 \text{ (par périodicité)} & \text{si } n \neq p. \end{cases}$$

  □

Rappel : projection orthogonale dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$



La projection orthogonale $p_F : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to F \\ x \mapsto p_F(x) \end{array} \right.$ de $\mathbb{R}^n$ sur un sous-espace vectoriel F est caractérisée, de façon équivalente, par l'une des conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{(i) } p_F \circ p_F = p_F, \ p_F \text{ est orthogonale} \\ \text{(ii) } p_F(x) \in F \text{ et } x - p_F(x) \perp F \\ \text{(iii) } \inf\limits_{y \in F} ||x-y|| = ||x - p_F(x)|| \quad \text{(la projection réalise la distance de } x \text{ à } F) \end{cases}$$

Si $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_d)$ est une bon de F de dimension d, on a une formule pour p_F :

$$\boxed{P_F(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}$$

Extension de la projection dans l'espace vectoriel D_T

Soit F le sev de D_T engendré par les polynômes trigonométriques $\{e_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$,
F_N le sev engendré par $\{e_n(t), -N \leqslant n \leqslant N\}$.

Alors $S(f)$ est la projection orthogonale de $f \in D_T$ sur F

$S_N(f)$ est la projection orthogonale de $f \in D_T$ sur F_N :
($S_N(f)$ est la fonction de F_N « la plus proche » de f)

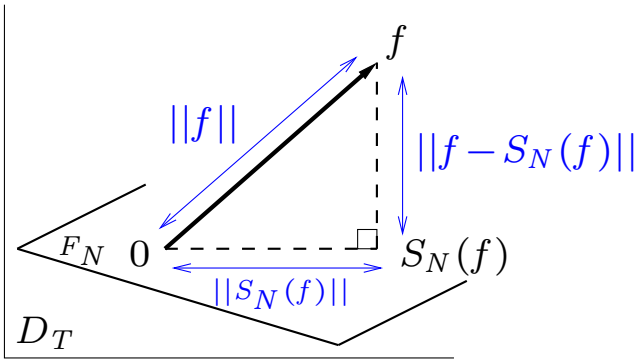
$$S_N(f) = \sum_{n=-N}^{N} \underbrace{\langle f, e_n \rangle}_{=c_n} e_n$$

L'égal. de Parseval et l'inégal. de Bessel correspondent au théorème de Pythagore

$$||S_N(f)||^2 + ||f - S_N(f)||^2 = ||f||^2$$

$$||S_N(f)||^2 = \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = ||f||^2$$

$||f - S_N(f)||^2 \underset{N\to+\infty}{\to} 0$ correspond à la convergence quadratique[7] de la série de Fourier vers f.



⚠ Cette convergence quadratique (que vous verrez un peu en 3A) n'entraîne pas forcément la convergence ponctuelle[8], il faut des hypothèses en plus pour cela, par exemple celle du théorème de Dirichlet[9]

7. c'est-à-dire que la distance, au sens de la norme $||\cdot||$, tend vers 0.
8. c'est-à-dire que $S_N(f)(t)$ converge vers $f(t)$ pour tout t fixé.
9. en plus d'appartenir à D_T, f doit être C^1 par morceaux.