ne rien écrire

Exo1:

Exo2:

Exo3:

NOM Prénom + code barre

INSA Rennes
2ème année STPI
Année universitaire 2026-2027

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3

Vendredi 6 novembre 2026 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici.
CV signifie convergence et DV signifie divergence.
Cocher une case CV ou DV à tort sera pénalisé mais pas de pénalisation pour les autres cases.

1.1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(\ln(n))}$ ☐ CV ☐ DV

1.2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^3}dx$ ☐ CV ☐ DV

1.3. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $I =$ ☐

1.4. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ converge : ☐

En cas de CV : $K =$ ☐

1.5. Valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\sum \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ CV : ☐

1.6. $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $S =$ ☐

1.7. $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n}{n!}$ ☐ CV ☐ DV.

1.8. Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n$ CV. Alors :

$\sum u_n^2$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $u_n =$ ☐

$\sum \sqrt{u_n}$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $u_n =$ ☐

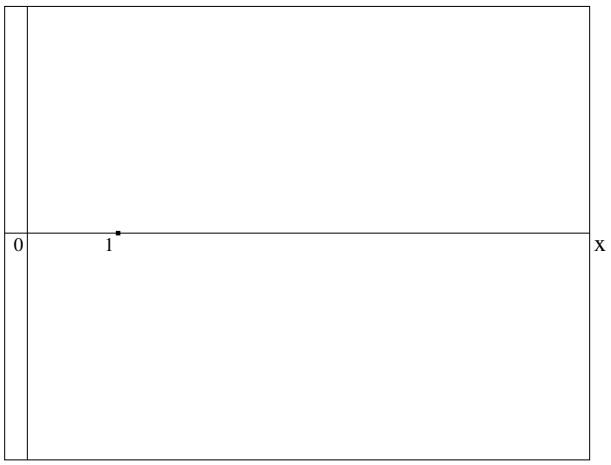
1.9. Supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ CV. Alors :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $f(x) =$ ☐

$\displaystyle\int_1^{+\infty} (-f(x))dx$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $f(x) =$ ☐

Exercice 2. Sur $]1, +\infty[$, on définit $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Prouver que $f \geq 0$ et est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Tracer l'allure de la représentation graphique de f.



Rappeler le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre n en 0 :

Démontrer que $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur. *[On pourra utiliser une intégration par parties.]*

Que peut-on dire au sujet de la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} f(n)$?

Démontrer que $-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)$ pour $n \geq 2$. En déduire $\sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$.

Exercice 3. Soit $D = \{\text{suites } d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} : d_0 \in \mathbb{N} \text{ et } \forall n \geq 1,\ d_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}\}$ et $S(d) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$.

Montrer que, pour toute suite $d \in D$, $S(d)$ est bien définie (c'est-à-dire que la série $\sum \frac{d_n}{10^n}$ converge).

Si $d_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 1$, d_n est la n ième décimale de π, que vaut $S(d)$?

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$.

Déduire de la question précédente que $0,99999\cdots = 1$ *[Calculer $S(d)$ avec $d_0 = 0$ et $d_n = 9$ pour $n \geq 1$.]*