ne rien écrire

Exo1:

Exo2:

Exo3:

CORRECTION À LA FIN

INSA Rennes
2ème année STPI
Année universitaire 2026-2027

DEVOIR SURVEILLÉ — ANALYSE 3

Vendredi 6 novembre 2026 — durée : 1h30

Tous documents et matériels électroniques interdits.
Travailler avec un brouillon avant de rédiger synthétiquement.

Exercice 1. Cocher les cases correctes ci-dessous. On ne demande ni calculs ni justifications ici.
CV signifie convergence et DV signifie divergence.
Cocher une case CV ou DV à tort sera pénalisé mais pas de pénalisation pour les autres cases.

1.1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(\ln(n))}$ ☐ CV ☐ DV

1.2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^3}dx$ ☐ CV ☐ DV

1.3. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $I =$ ☐

1.4. Valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}dt$ converge : ☐

En cas de CV : $K =$ ☐

1.5. Valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que $\sum \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$ CV : ☐

1.6. $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1$ ☐ CV ☐ DV. En cas de CV : $S =$ ☐

1.7. $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n}{n!}$ ☐ CV ☐ DV.

1.8. Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sum u_n$ CV. Alors :

$\sum u_n^2$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $u_n =$ ☐

$\sum \sqrt{u_n}$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $u_n =$ ☐

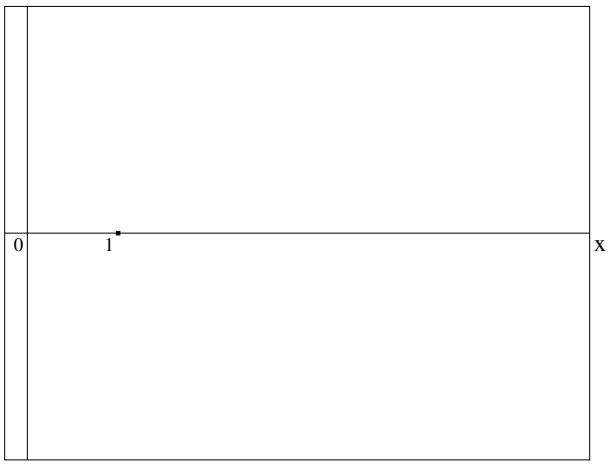
1.9. Supposons que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ CV. Alors :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $f(x) =$ ☐

$\displaystyle\int_1^{+\infty} (-f(x))dx$ ☐ CV ☐ peut être DV, par exemple $f(x) =$ ☐

Exercice 2. Sur $]1, +\infty[$, on définit $f(x) = -\ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$. Prouver que $f \geq 0$ et est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Tracer l'allure de la représentation graphique de f.



Rappeler le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre n en 0 :

Démontrer que $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge et calculer sa valeur. *[On pourra utiliser une intégration par parties.]*

Que peut-on dire au sujet de la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 2} f(n)$?

Démontrer que $-\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1)$ pour $n \geq 2$. En déduire $\sum_{n=2}^{+\infty} f(n)$.

Exercice 3. Soit $D = \{\text{suites } d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} : d_0 \in \mathbb{N} \text{ et } \forall n \geq 1,\ d_n \in \{0, 1, \cdots, 9\}\}$ et $S(d) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{10^n}$.

Montrer que, pour toute suite $d \in D$, $S(d)$ est bien définie (c'est-à-dire que la série $\sum \frac{d_n}{10^n}$ converge).

Si $d_0 = 3$ et, pour tout $n \geq 1$, d_n est la n ième décimale de π, que vaut $S(d)$?

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{10^n}$.

Déduire de la question précédente que $0,99999\cdots = 1$ *[Calculer $S(d)$ avec $d_0 = 0$ et $d_n = 9$ pour $n \geq 1$.]*

Correction du DS d'analyse 3 de novembre 2026

1.1. (CV) Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(\ln(n))}$. On remarque que $\sum u_n$ est une série alternée avec $u_n = (-1)^n a_n$, $a_n = \dfrac{1}{\ln(\ln(n))}$. Comme a_n est décroissante et converge vers 0, la série $\sum u_n$ converge par le théorème spécial des séries alternées.

1.2. (DV) La fonction $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^3}$ est continue et positive sur $]0,1]$ et $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x}$. Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{2x}$ diverge (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1$), on conclut que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ diverge.

1.3. (CV et $I = \frac{\ln 2+1}{2}$) La fonction $f(t) = \dfrac{\ln t}{t^2}$ est continue et positive sur $[2,+\infty[$ et $0 \le f(t) = \dfrac{\ln t}{t^{1/2}}\dfrac{1}{t^{3/2}} \le \dfrac{1}{t^{3/2}}$ pour $t \ge A$ avec $A \ge 2$ assez grand, car $\dfrac{\ln t}{t^{1/2}} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées. Donc I converge par théorème de comparaison. On calcule alors, à l'aide d'une intégration par parties : $I = \left[-\dfrac{1}{t}\ln t\right]_2^{+\infty} + \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{\ln 2 + 1}{2}$.

1.4. (Pour $\alpha < 0$, $K = -\frac{1}{\alpha}$) Pour $A \ge 0$, on a $\displaystyle\int_0^A e^{\alpha t}dt = \left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}\right]_0^A = \frac{e^{\alpha A}-1}{\alpha}$ et ce dernier terme converge quand $A \to +\infty$ si et seulement si $\alpha < 0$. Dans ce cas, à la limite on trouve $K = -\dfrac{1}{\alpha}$.

1.5. (CV si et seulement si $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$) Soit $u_n := \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$.
Si $|a| < 1$ alors $a^n \to 0$ et $|u_n| \sim |a|^n$ avec $\sum |a|^n$ convergente. Par équivalence, on conclut que $\sum u_n$ converge absolument.
Si $|a| > 1$, alors $|u_n| \sim \left|\dfrac{a^n}{a^{2n}}\right| = \dfrac{1}{|a|^n}$ avec $\sum \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$ convergente. Par équivalence, on conclut que $\sum u_n$ converge absolument.
Enfin, si $a = 1$ alors $u_n = \dfrac{1}{2} \not\to 0$ et si $a = -1$ alors $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2} \not\to 0$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement si $a = \pm 1$.

1.6. (DV) $u_n := \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} - 1 \ge 0$ pour $n \ge 1$. On a : $u_n = \dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \sim \dfrac{1}{2n}$ et $\sum \frac{1}{2n}$ est une série de Riemann divergente. Par équivalence, on obtient que $\sum u_n$ diverge.

1.7. (CV, $S = e^\pi$) D'après le cours, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} =: e^z$ converge absolument (se vérifie avec le critère de d'Alembert) d'où $S = e^\pi$.

1.8. ($\sum u_n^2$ CV, $\sum \sqrt{u_n}$ DV pour $u_n = \frac{1}{n^2}$ par exemple)
Comme $\sum u_n$ converge, $u_n \to 0$. Donc, pour n assez grand, $0 \le u_n^2 \le u_n$. Par comparaison, on obtient que $\sum u_n^2$ converge.
Si on prend $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ par exemple, $\sum u_n$ est une série de Riemann convergente mais $\sum \sqrt{u_n} = \sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

1.9. ($\int_1^{+\infty} |f(x)|dx$ peut être DV, par exemple $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $\int_1^{+\infty}(-f(x))dx$ CV)
On a vu en cours que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ converge mais pas absolument.
Si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge, alors par définition, $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1^+, A\to+\infty} \int_\alpha^A f(x)dx = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}$. Mais alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1^+, A\to+\infty} \int_\alpha^A (-f(x))dx = -\ell$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}(-f(x))dx$ converge.

Exercice 2. La fonction $f(x) = -\ln\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$ est définie et dérivable sur $]1,+\infty[$ avec $f'(x) = -\dfrac{2}{x(x^2-1)} \le 0$ donc la fonction est décroissante. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$, on en déduit que $f(x) \ge 0$ sur $]1,+\infty[$. On obtient l'allure de la Figure 1.

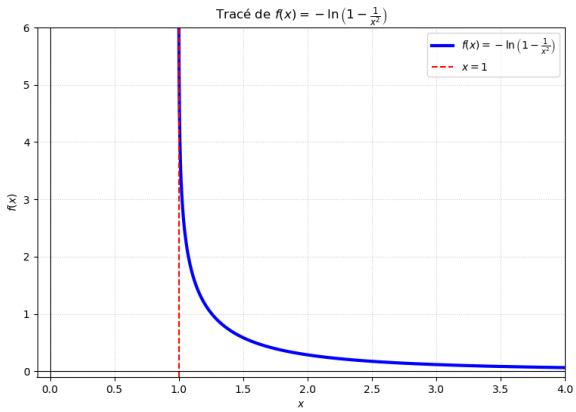


Figure 1: Allure de $f(x) = -\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

D'après le cours de 1ère année : $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}u^n}{n} + o(u^n)$ avec $o(u^n) = u^n\varepsilon(u)$, où $\varepsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$.

La fonction f étant continue sur $[2,+\infty[$, on a seulement un problème de convergence en $+\infty$. En utilisant le développement limité ci-dessus, on obtient $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$. Comme $f \geq 0$ et que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2}$ est convergente (intégrale de référence de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$), par le théorème d'équivalence, on conclut que $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ converge.

On calcule l'intégrale par intégration par parties en utilisant en cours de route une décomposition en éléments simple. Pour tout $A \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\int_2^A f(x)dx &= \left[-x\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]_2^A - \int_2^A \frac{2}{1-x^2}dx \\
&= -A\ln\left(1-\frac{1}{A^2}\right) + 2\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \int_2^A \frac{1}{x-1}dx - \int_2^A \frac{1}{1+x}dx \\
&= -A\ln\left(1-\frac{1}{A^2}\right) + 2\ln(3) - 2\ln(4) + \ln(A-1) - \ln(A+1) + \ln(3) \\
&= -A\ln\left(1-\frac{1}{A^2}\right) + \ln\left(A(1-\frac{1}{A})\right) - \ln\left(A(1+\frac{1}{A})\right) + 3\ln(3) - 2\ln(4) \\
&= -A\ln\left(1-\frac{1}{A^2}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{A}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{A}\right) + 3\ln(3) - 2\ln(4) \underset{A\to+\infty}{\to} 3\ln(3) - 2\ln(4).
\end{aligned}$$

Finalement $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx = 3\ln(3) - 2\ln(4)$. (Remarque : ce calcul pouvait être utilisé directement pour prouver la convergence.)

Comme la fonction f est continue, positive et décroissante sur $[2,+\infty[$, la comparaison série-intégrale nous dit que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)dx$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} f(n)$ sont de même nature donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} f(n)$ converge.

On a $-\ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = -\ln\left(\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = -\ln(n-1) - \ln(n+1) + 2\ln(n)$. Il suit, pour tout $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^N f(n) &= \sum_{n=2}^N 2\ln(n) - \ln(n-1) - \ln(n+1) = \sum_{n=2}^N 2\ln(n) - \sum_{n=2}^N \ln(n-1) - \sum_{n=2}^N \ln(n+1) = \sum_{n=2}^N 2\ln(n) - \sum_{n=1}^{N-1} \ln(n) - \sum_{n=3}^{N+1} \ln(n) \\
&= 2\ln(2) + 2\ln(N) - \ln(1) - \ln(2) - \ln(N) - \ln(N+1) = \ln(2) + \ln(N) - \ln(N(1+\frac{1}{N})) = \ln(2) - \ln(1+\frac{1}{N}) \underset{N\to+\infty}{\to} \ln(2).
\end{aligned}$$

On conclut que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} f(n) = \ln(2)$.

Exercice 3. Pour toute suite $d = (d_n) \in D$, posons $u_n = \dfrac{d_n}{10^n}$. Comme $0 \leq d_n \leq 9$ pour $n \geq 1$, on a $0 \leq u_n \leq \frac{9}{10^n}$. Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{10}\right)^n$ converge (c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{10} \in]-1,1[$), on conclut par comparaison que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et $S(d) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe.

Pour $d = (d_n) \in D$, on a $S(d) = d_0 + d_1 10^{-1} + d_2 10^{-2} + d_2 10^{-3} + \cdots = d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 \cdots$. Donc si $d_0 = 3$ et d_n est la n ième décimale de π, on obtient $S(d) = 3,141592\cdots = \pi$ ($S(d)$ est l'écriture décimale du nombre π).

Ce calcul a été fait en cours : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n+k}} = \frac{1}{10^k}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^k}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9\cdot 10^{k-1}}$.

Soit $d \in D$ telle que $d_0 = 0$, $d_n = 9$ pour $n \geq 1$. D'une part, on a $S(d) = 0,99999\cdots$ D'autre part, en utilisant le calcul précédent avec $k = 1$, on obtient $S(d) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^n} = \frac{9}{9\cdot 10^{1-1}} = 1$, d'où $0,99999\cdots = 1$.