

Examen du cours d'EDP

Mardi 24 mars 2026 – durée : 2h

**** Tous appareils électroniques interdits ****

Documents autorisés : les supports de cours et TD mis à disposition, le polycopié de rappel, vos notes personnelles manuscrites.

Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Exercice 1. On considère un fluide caloporteur parcourant un tube de longueur L de section constante à la vitesse constante $v > 0$. La température moyenne du fluide ne dépend que de l'abscisse x et du temps t et est notée $u(t, x)$. Ce tube échange avec le milieu extérieur de sorte que l'évolution de la température est modélisée par l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + v \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 1 + u(t, x) \quad 0 < x < L, t > 0. \quad (1)$$

1.1. Déterminer la caractéristique passant par l'abscisse $x_0 \in [0, L]$ au temps $t_0 > 0$. Représenter les caractéristiques sur un schéma.

1.2. Soit $x(t)$ une caractéristique. Écrire l'EDO régissant la variation de u le long de cette caractéristique. Donner la solution générale de cette EDO.

On suppose que la température initiale dans le tube est $u(0, x) = T_0$ pour $0 \leq x \leq L$ et que la température d'entrée du fluide dans le tube est $u(t, 0) = T_0$ pour $t \geq 0$, où T_0 est une température constante donnée.

1.3. Déterminer la température $u(t, x)$ dans le tube pour $0 < x < L$ et $t > 0$.

On suppose maintenant que $\underline{v = 2}$, $\underline{L = 2}$, $\underline{T_0 = 1}$.

1.4. Tracer les graphes

$$\begin{aligned} t &\mapsto u(t, 2), & t > 0; \\ x &\mapsto u\left(\frac{1}{2}, x\right), & 0 \leq x \leq 2; \\ x &\mapsto u(1, x), & 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

Tourner la page SVP

Exercice 2. On considère une corde vibrante de longueur L fixée à ses deux extrémités. L'amplitude verticale de la corde à l'abscisse $0 \leq x \leq L$ et au temps $t \geq 0$ est notée $v(t, x)$. À l'équilibre, l'amplitude de la corde est $v = 0$ comme sur la Figure 1. On suppose que l'évolution de l'amplitude de la corde au cours du temps est gouvernée par l'EDP

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{\partial v}{\partial t}(t, x), \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (2)$$

Les questions 2.1 et 2.5 sont indépendantes des autres.

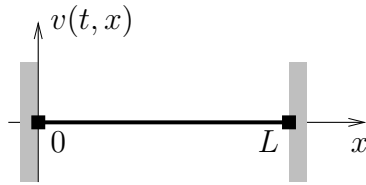


Figure 1 : La corde à l'équilibre

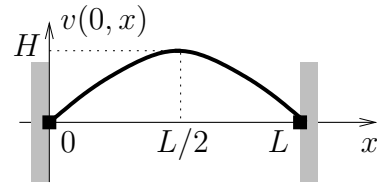


Figure 2 : Forme de la corde à $t = 0$

2.1. On suppose qu'en $t = 0$, la corde a la forme tracée sur la Figure 2. On la lâche sans vitesse initiale. Écrire les 2 conditions aux limites et les 2 conditions initiales qu'il faut rajouter à (2) pour décrire le mouvement de la corde (on supposera que la corde représentée sur la Figure 2 est le graphe d'une fonction f). Décrire qualitativement le mouvement de la corde au cours du temps.

2.2. On cherche une solution de (2) à variables séparées sous la forme $v(t, x) = \phi(x)\psi(t)$. Démontrer que ϕ et ψ satisfont des EDO du second ordre linéaires à coefficients constants de la forme

$$\phi''(x) + a\phi(x) = 0, \quad (3)$$

$$\psi''(t) + b\psi'(t) + c\psi(t) = 0, \quad (4)$$

où a, b, c sont à déterminer en fonction de $\omega^2 = -\frac{\phi''(x_0)}{\phi(x_0)} = -\frac{\psi''(t_0) + \psi'(t_0)}{\psi(t_0)}$.

2.3. On suppose que ω est un réel strictement plus grand que $1/2$.

2.3.1. Donner la solution générale de (3).

2.3.2. Démontrer que $\psi(t) = e^{-t/2} \left(C \cos(\frac{\delta t}{2}) + D \sin(\frac{\delta t}{2}) \right)$ avec C, D constantes réelles et $\delta = \sqrt{4\omega^2 - 1}$, est la solution générale de (4).

2.4. On rajoute à (2) les conditions aux limites

$$v(t, 0) = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$v(t, L) = 0, \quad t > 0. \quad (6)$$

Démontrer qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant (2)-(5)-(6) de la forme

$$v_k(t, x) = e^{-t/2} \left(C_k \cos(\frac{\delta_k}{2} t) + D_k \sin(\frac{\delta_k}{2} t) \right) \sin(\omega_k x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

où $\omega_k = \frac{k\pi}{L}$, $\delta_k = \sqrt{4\omega_k^2 - 1}$ et C_k, D_k sont des constantes réelles.

Tourner la page SVP

2.5. On considère la fonction $v_0 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $v_0(x) = \frac{x}{L}(1 - \frac{x}{L})$. Tracer cette fonction. Déterminer une suite $(\gamma_k)_{k=1,2,\dots}$ de sorte que

$$v_0(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \gamma_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right), \quad x \in [0, L].$$

[Développer en série de Fourier un prolongement périodique convenable de v_0 .]

2.6. On rajoute à (2)-(5)-(6) les conditions initiales

$$v(0, x) = v_0(x), \quad x \in [0, L], \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = 0, \quad x \in [0, L]. \quad (9)$$

Trouver la solution du système (2)-(5)-(6)-(8)-(9) sous la forme $v(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, t)$.

2.7. Quelle est la limite de $v(t, x)$ quand $t \rightarrow +\infty$? Interpréter le résultat physiquement. Que se passerait-il si le terme $-\frac{\partial v}{\partial t}(t, x)$ n'était pas présent dans l'EDP (2) ?

————— **FIN** —————