

Examen du cours “Contrôle Optimal”

Vendredi 23 janvier 2026 – durée : 3h

**** Tous appareils électroniques interdits ****

Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.

Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. Une entreprise produit un bénéfice $y(t) > 0$ au temps t . Une fraction $\alpha(t)y(t)$ de ce bénéfice, avec $0 \leq \alpha(t) \leq 1$, est réinvestie dans la production et contribue à l’augmentation de la richesse créée par l’entreprise et le reste est distribué aux actionnaires.

On suppose que l’évolution du bénéfice est gouverné par l’EDO

$$\begin{cases} y'(s) = k\alpha(s)y(s), & 0 < s \leq t, \\ y(0) = x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

où k est une constante strictement positive donnée.

La fraction $\alpha(t) \in [0, 1]$ réinvestie est considérée comme un contrôle et on considère le problème de contrôle optimal

$$\inf_{\alpha(\cdot) \in [0,1]} J(x, t, \alpha(\cdot)) \quad \text{avec } J(x, t, \alpha(\cdot)) := \int_0^t (\alpha(s) - 1)y(s)ds.$$

1.1. Interpréter l’EDO (1), en particulier quand $\alpha(s) \equiv 0$ et $\alpha(s) \equiv 1$.

1.2. Expliquer quel est l’objectif de ce problème.

1.3. Écrire le principe du maximum de Pontryagin pour ce problème.

[Écrire l’Hamiltonien $\hat{H}(y, p, \alpha)$, les EDO satisfaites par la trajectoire optimale $y^(s)$ et l’état adjoint $p^*(s)$, la condition finale $p^*(t)$ et le problème de maximisation permettant de calculer le contrôle optimal $\alpha^*(s)$.]*

1.4. En déduire la valeur du contrôle optimal $\alpha^*(s)$ en fonction de k et $p^*(s)$.

[On rappelle que $y^(s) > 0$ pour tout $s \geq 0$.]*

1.5. Résoudre l’EDO satisfaite par p^* .

[Remarquer que $kp(s) \leq 1$ sur un intervalle de la forme $[t^, t]$ avec $kp^*(t^*) = 1$ et que, sur cet intervalle l’EDO est très simple à résoudre. Résoudre ensuite l’EDO sur $[0, t^*]$.]*

1.6. Conclure que le contrôle optimal est bang-bang avec un seul saut en t^* , avec t^* introduit dans la question précédente.

1.7. En déduire la trajectoire optimale.

1.8. Calculer la fonction valeur $V(x, t) = \inf_{|\alpha(\cdot)| \leq 1} J(x, t, \alpha(\cdot))$ pour $x > 0$ et $t \in [0, +\infty)$.

1.9. Déterminer l'EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaite par V .

1.10. Vérifier la fonction valeur $V(x, t)$ calculée dans la question 8 est bien solution de l'EDP sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ (aux points où V est différentiable). Est-ce l'unique solution de cette EDP ?

Exercice 2. On considère l'EDO contrôlée

$$\begin{cases} X'(s) = \alpha(s), & 0 < s \leq t \leq T \\ X(0) = x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où la commande $\alpha \in \mathcal{A}_T := L^\infty([0, T], \mathbb{R})$. On définit le problème de contrôle optimal par

$$V(x, t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}_T} \frac{1}{2} \int_0^t (X(s)^2 + X(s)\alpha(s) + \alpha(s)^2) ds + \frac{1}{4} X(t)^2.$$

2.1. Écrire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman satisfaite par la fonction valeur V sur $\mathbb{R} \times (0, T)$ et donner la condition initiale en $t = 0$. (Calculer complètement le Hamiltonien H).

2.2. Déterminer la fonction valeur V .

[Chercher une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman sous la forme $V(x, t) = \phi(t)x^2$. Montrer que ϕ satisfait une EDO de Riccati et trouver une solution évidente (penser aux solutions constantes !).]

2.3. Dédurre les contrôles et trajectoires optimales.

[Faire la synthèse du contrôle.]

Exercice 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ suffisamment régulière. On considère l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) + u(x, t)(u^2(x, t) - 1) + \varphi_1(t)u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{dans } \mathcal{Q} = \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, t) &= -u^2(x, t) \quad \text{sur } \Sigma = \Gamma \times]0, T[, \\ u(x, t = 0) &= \varphi_2(x) \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

où $T > 0$ est un instant final **fixé**, f une fonction **donnée** de $L^2(\mathcal{Q})$ suffisamment régulière et $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ la fonction contrôle dans $L^3(0, T) \times L^2(\Omega)$ sous la contrainte locale :

$$a \leq \varphi_1(t) \leq b, \quad p.p. \quad t \in (0, T) \quad (\text{avec } a \text{ et } b \text{ deux constantes strictement positives}). \tag{3}$$

On admettra l'existence et l'unicité de la solution u de (2) dans $\mathcal{C}(0, T; H^1(\Omega)) \times \mathcal{C}^1(0, T; L^2(\Omega))$ et on notera par $\mathcal{F}$ l'opérateur solution du système (2), i.e., $u = \mathcal{F}(\Phi)$.

On définit la fonction coût J par

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (u(x, t))^2 dx dt + \frac{\alpha}{3} \int_0^T (\varphi_1(t))^3 dt + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} (\varphi_2(x))^2 dx,$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ deux constantes données. On admet que J est différentiable au sens de Gâteaux. Notre problème de contrôle $(\mathcal{P}_c)$ consiste à trouver la fonction Φ qui minimise l'objectif J sous la contrainte implicite du système (2) i.e. $u = \mathcal{F}(\Phi)$ et la contrainte locale (3).

3.1. Soit $w = \mathcal{F}'(\Phi).\Psi$ la dérivée de $\mathcal{F}$ par rapport à $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ dans la direction $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$. Donner l'équation satisfaite par la fonction w .

3.2. Calculer la dérivée $J'(\Phi).\Psi$ de J par rapport à $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ dans la direction $\Psi = (\psi_1, \psi_2)$ (on l'exprimera en fonction de w).

3.3. Donner le gradient de J par l'utilisation du problème adjoint que l'on déterminera (on notera par $\tilde{u}$ la solution du problème adjoint).

3.4. Donner les conditions d'optimalité caractérisant la solution optimale $\Phi^* = (\varphi_1^*, \varphi_2^*)$ en utilisant l'état adjoint $\tilde{u}^*$. En déduire le contrôle optimal Φ^* en fonction de u^* , $\tilde{u}^*$, a et b .

3.5. Proposer un algorithme pour résoudre numériquement le problème de contrôle $(\mathcal{P}_c)$. On détaillera très précisément chaque étape de l'algorithme.