INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

3MA – 2026-2027

Examen du cours "EDO et modélisation"

Octobre 2026 – durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****
Les notes personnelles manuscrites sont permises (cours, TD, exercices, etc.) ainsi que les documents imprimés distribués dans le cadre de ce cours.
Tous autres photocopies ou textes imprimés interdits.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)^3 + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t)^3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1.1. Prouver que, pour toute donnée initiale $(0, (x_0, y_0)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, l'EDO (1) admet une unique solution maximale $(]S, T[, (x, y))$ avec $S < 0 < T$.

1.2. Trouver les points d'équilibre de l'EDO (1).

1.3. Trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la fonction $L(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ soit une fonction de Lyapunov globale au point d'équilibre $(0, 0)$.
[La fonction de Lyapunov est dite globale *si elle satisfait toutes les propriétés requises sur $\mathbb{R}^2$ tout entier et pas seulement dans un voisinage du point d'équilibre.]*

1.4. Déduire de la question précédente que la solution de l'EDO (1) est globale à droite, c'est-à-dire $T = +\infty$.
[Utiliser la fonction de Lyapunov pour démontrer que la solution ne peut pas exploser.]

1.5. Démontrer à l'aide des questions précédentes que le point $(0, 0)$ est asymptotiquement stable.

Exercice 2. Pendule inversé.
On considère un pendule de masse m constitué d'une tige rigide de masse négligeable de longueur ℓ pouvant tourner autour d'un axe dans un plan vertical à ce dernier (cf. Figure 1). On suppose que le pendule est soumis à la gravitation (on note g l'accélération de la pesanteur) et qu'il n'y a pas de frottement. À tout instant t, la position du pendule est repérée par l'angle $\varphi(t)$ que fait la tige par rapport à la position verticale renversée.

Remarque : c'est exactement le même problème que le pendule classique à ceci près qu'on décrit le mouvement avec l'angle φ et non $\theta = \varphi + \pi$.

2.1. Sans calculs, donner les points d'équilibre du système et discuter de leur stabilité.

Tournez svp

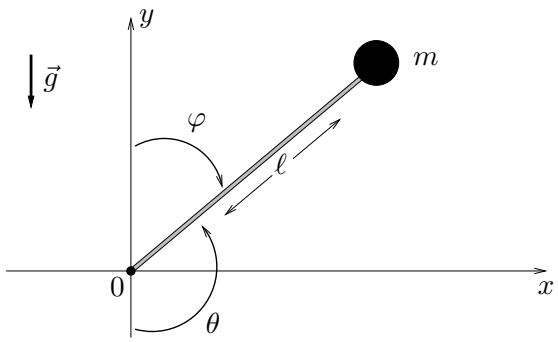


Figure 1: Pendule inversé

2.2. *(Il n'est pas nécessaire de traiter cette question pour la suite de l'exercice.)* Démontrer que l'angle φ vérifie l'EDO

$$\varphi'' - \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0. \tag{2}$$

[On pourra, soit utiliser, qu'en l'absence de frottement, l'énergie du système $E(t) = mg\ell\cos\varphi(t) + \frac{1}{2}m\ell^2(\varphi'(t))^2$ *est preservée au cours du temps, soit faire le bilan des forces et utiliser le principe fondamental de la dynamique de Newton.]*

On écrit l'EDO (2) sous la forme d'une EDO d'ordre 1,

$$X'(t) = F(X(t)) = \begin{pmatrix} F_1(X(t)) \\ F_2(X(t)) \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{avec } X = \begin{pmatrix} \varphi \\ v \end{pmatrix},\ v = \varphi', \tag{3}$$

et $F_1(X) = F_1(\varphi, v) = v$.

2.3. Donner l'expression de $F_2(\varphi, v)$ en utilisant l'EDO (2).

2.4. En utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz, démontrer que le problème de Cauchy constitué du système (3) associé à la condition initiale $X(t_0) = X_0 = (\varphi_0, v_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ a une unique solution globale sur $\mathbb{R}$.

2.5. Trouver tous les points d'équilibre du système (3) et comparer avec la question 2.1. Étudier la stabilité dans le cas du point $(0, 0)$ en considérant l'EDO linéarisée et en s'aidant des résultats du polycopié et du théorème d'Hartman-Grobman. Dans le cas du point $(\pi, 0)$, le théorème d'Hartman-Grobman s'applique-t-il ?

2.6. Sur la figure 2, on a dessiné l'allure du portrait de phase de l'EDO (2) (ou du système (3)). À quoi correspondent les points A et B ? Interprétez qualitativement les trajectoires γ_1, γ_2 et γ_3 (brièvement et sans calculs).

On veut maintenant stabiliser le pendule en position renversée. Pour cela, on place la base du pendule sur un petit chariot pouvant se déplacer sur la droite (Ox) (voir Figure 3). En appliquant une accélération u au chariot, on agit sur l'évolution de l'angle φ et on admet que φ satisfait maintenant la nouvelle EDO

$$\varphi'' - \frac{g}{\ell}\sin\varphi + \frac{u}{\ell^2} = 0. \tag{4}$$

On choisit d'appliquer une accélération par retour d'état, c'est-à-dire de la forme

$$u(t) = a\varphi(t) + b\varphi'(t), \qquad a, b \text{ constantes.}$$

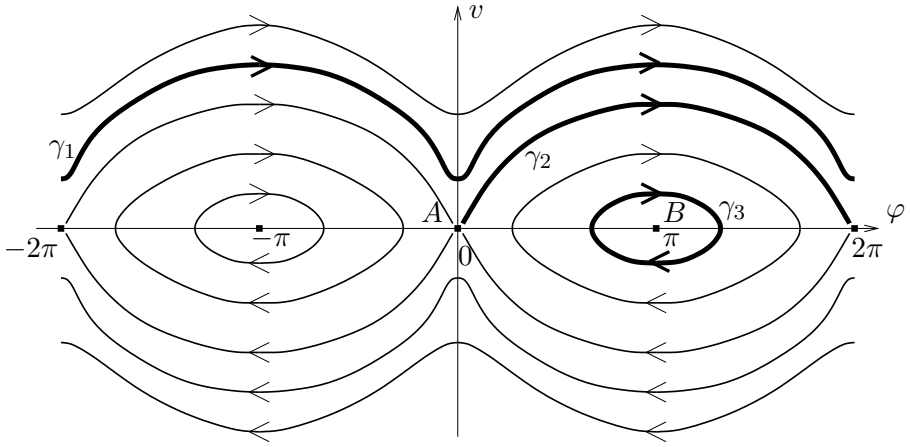


Figure 2: Portrait de phase du pendule inversé

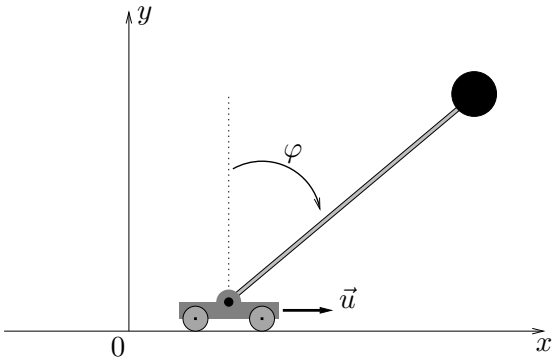


Figure 3: Pendule inversé contrôlé

2.7. Préciser la nouvelle expression de $F_2(\varphi, v)$ quand on écrit l'EDO (4) sous la forme d'un système (3).

2.8. Expliquer brièvement pourquoi le nouveau système a encore une unique solution globale pour toute condition initiale $X_0 = (\varphi_0, v_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2.9. Procéder comme dans la question 2.5 pour démontrer que si l'on choisit $a = \ell^2 + g\ell$ et $b = 2\ell^2$ alors le point $(0, 0)$ devient un équilibre asymptotiquement stable du système ; tracer l'allure du portrait de phase au voisinage de $(0, 0)$.

2.10. *(Bonus)* Est-il possible de stabiliser le pendule renversé en considérant des accélérations $u(t) = a\varphi(t)$ qui ne dépendent que de φ ?

——————— FIN ———————