INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES

Année universitaire 2026-2027
3GMA FISA

DEVOIR SURVEILLÉ Outils d'analyse pour l'ingénieur

Jeudi 5 novembre 2026 — durée : 2h

***** Tous appareils électroniques interdits *****

Documents permis :
Toutes les notes personnelles manuscrites,
les énoncés des feuilles de TD, les polycopiés de cours et de rappel du module.

Tous autres documents, photocopies ou textes imprimés interdits.

Nom :	**Prénom :**

Cochez directement vos réponses sur le sujet pages 2 et 3.

Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses dans chacune des questions du QCM.

Toute réponse fausse sera comptée négativement.

Intégration et transformée de Fourier

1. Cocher les assertions correctes.

☐ $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ ☐ $e^{5t-t^2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{e^t-1}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^1(]0,1])$ ☐ $\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}} \in \mathrm{L}^1([1,+\infty[)$

☐ $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \in \mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ ☐ $e^{5t-t^2} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ☐ $\frac{e^t-1}{t^{3/2}} \in \mathrm{L}^2(]0,1])$ ☐ $\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}} \in \mathrm{L}^2([1,+\infty[)$

2. En faisant un changement en polaires, on trouve que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$ vaut

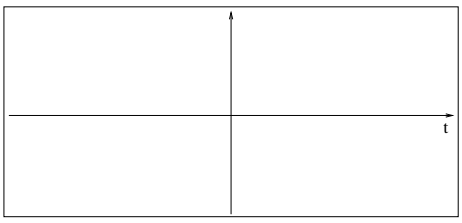
☐ 0 ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ☐ $\sqrt{\pi}$ ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ 2π ☐ $+\infty$

3. La transformée de Fourier de $e^{-\pi(t-4)^2}$ vaut

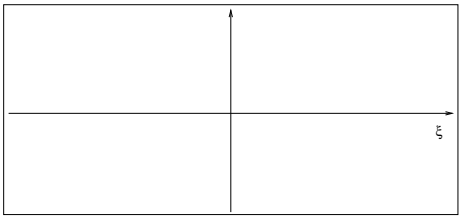
☐ n'existe pas ☐ $e^{-\pi(\xi-4)^2}$ ☐ $e^{-\pi(\xi+4)^2}$ ☐ $e^{-\pi(8i\xi+\xi^2)}$

☐ $e^{-\pi(4i\xi+\xi^2)}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2(\xi-4)^2}$ ☐ $\sqrt{\pi}e^{-\pi(8i\xi-\xi^2)}$ ☐ $e^{\pi(6i\xi-\xi^2)}$

4. Soit $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Tracer l'allure de la fonction f



Tracer l'allure de $\hat{f}(\xi)$

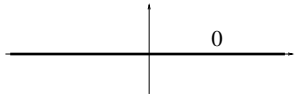


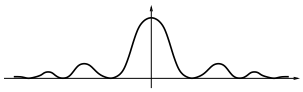
5. La transformée de Fourier de $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}]} + \mathbb{1}_{[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}]}$ vaut

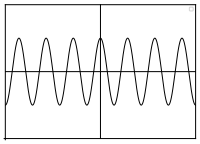
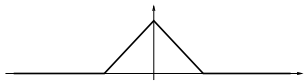
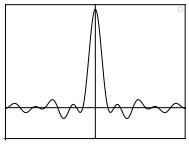
☐ n'existe pas ☐ $\frac{2}{\pi\xi}\sin(\xi)\cos(3\xi)$ ☐ $\frac{2}{\pi\xi}\sin(3\xi)\cos(\xi)$

☐ 0 ☐ $-\frac{2}{\pi\xi}\sin(\xi)\cos(3\xi)$ ☐ $\frac{2}{\pi\xi}\sin(5\xi)\cos(\xi)$

6. L'allure de la tranformée de Fourier de la question précédente est

☐ Elle n'existe pas ☐ 

☐ 

☐  ☐  ☐ 

7. En utilisant la formule $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1\hat{f}_2$, le calcul de $\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2}$ donne

☐ 0 ☐ $\pi^2 e^{-4\pi|x|}$ ☐ $\frac{2\pi}{1+x^2}$ ☐ $\frac{1}{1+x^2}$ ☐ $\frac{2}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ ☐ $\frac{2\pi}{4+x^2}$ ☐ $\frac{1}{4+x^2}$ ☐ $\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}$

Analyse complexe

On définit le logarithme complexe principal $\mathrm{Log}\,(z)$ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$ (le plan complexe fendu privé du demi-axe des réels négatifs) en choisissant l'argument de z dans $]-\pi,\pi[$. Asssocié à ce logarithme, on définit la fonction $z^{1/2}=e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(z)}$.

8. Soit $j=e^{2i\pi/3}$. ☐ $\overline{j}=j$ ☐ $\overline{j}=j^2$ ☐ $\overline{j}=-j^2$ ☐ $\overline{j}=e^{4i\pi/3}$

☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=j$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=\overline{j}$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}=e^{-i\pi/3}$ ☐ $\left(j^2\right)^{1/2}$ n'existe pas

9. Soit $f(z)=\dfrac{\mathrm{Log}(1+z)}{z^{30}}$. Alors

☐ f n'est holomorphe nulle part
☐ f est holomorphe sur $D(0,1)$
☐ f est holomorphe sur $D(1,2)$
☐ $f(i)=0$
☐ $f(i)=-\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}$
☐ $f(i)=-\ln 2-i\frac{\pi}{4}$
☐ f est holomorphe sur $\mathbb{C}$
☐ f est holomorphe sur $D(0,1)\setminus\{0\}$
☐ $f(i)$ n'est pas défini
☐ $f(i)=\ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}$
☐ $f(i)=\ln 2+i\frac{\pi}{4}$
☐ $f(i)=-\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{2}$

10. Parmi les valeurs suivantes, quelle est la meilleure approximation de $e^{1/4}$?

☐ $1,25$ ☐ $1,271$ ☐ $1,284$ ☐ $1,3$ ☐ $1,301$ ☐ $1,646$ ☐ $2,037$

11. Le développement en série entière de $f(z)=\dfrac{z}{z^2+4}$ en $z=0$ est :

☐ il n'existe pas ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{2n+1}}{4^{n+1}}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}z^{2n+1}$

☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n+1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n}z^n$.

Le rayon de convergence est ☐ 0 ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ 2 ☐ 4 ☐ $+\infty$
☐ n'existe pas

12. Soit $h(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{2^n n!}$.

Le rayon de convergence R de la série entière h est

$R=$ ☐ n'existe pas ☐ 0 ☐ $\dfrac{1}{2}$ ☐ 1 ☐ 2 ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $+\infty$

Le calcul de la somme donne

$h(z)=$ ☐ 0 ☐ $\cos\left(\dfrac{z}{2}\right)$ ☐ $\cos\left(\dfrac{z^2}{2}\right)$ ☐ $e^{\frac{z^2}{2}}$ ☐ $e^{-\frac{z^2}{2}}$ ☐ $+\infty$

Correction du DS de novembre 2026 – 3GMA FISA "Outils d'analyse pour l'ingénieur"

1. $\frac{1}{t+\sqrt{t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1(]0,+\infty[)$ car $\left|\frac{1}{t+\sqrt{t}}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$.
$\frac{1}{t+\sqrt{t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]0,+\infty[)$ car $\left|\frac{1}{t+\sqrt{t}}\right|^2 \underset{t\to0}{\sim} \left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right|^2 = \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable en 0.
La fonction $t \mapsto e^{5t-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc on n'a de problème d'intégrabilité qu'en $\pm\infty$. On a $|e^{5t-t^2}| = |e^{5t-t^2/2}||e^{-t^2/2}| \leq e^{-t^2/2}$ pour $|t|$ assez grand car $e^{5t-t^2/2} \underset{t\to\pm\infty}{\to} 0$. Comme $e^{-t^2/2} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on en déduit par comparaison que e^{5t-t^2} est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.
$\frac{e^t-1}{t^{3/2}}$ est dans $\mathrm{L}^1(]0,1])$. Le seul problème d'intégrabilité est en 0 et on a $\left|\frac{e^t-1}{t^{3/2}}\right| \underset{t\to0}{\sim} \frac{t}{t^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable en 0.
$\frac{e^t-1}{t^{3/2}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^2(]0,1])$ car $\left|\frac{e^t-1}{t^{3/2}}\right|^2 \underset{t\to0}{\sim} \frac{1}{t}$ qui n'est pas intégrable en 0.
$\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}}$ n'est pas dans $\mathrm{L}^1([1,+\infty[)$ car $\left|\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}}\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\frac{\ln(t)}{t} \geq \frac{1}{t}$ pour $t \geq 1$.
$\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}}$ est dans $\mathrm{L}^2([1,+\infty[)$ car $\left|\frac{\ln(t)}{t+e^{-t}}\right|^2 \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(t)}{t^2}$ et $\frac{\ln^2(t)}{t^2} = \frac{\ln^2(t)}{t^{1/2}}\frac{1}{t^{3/2}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ pour t assez grand par croissances comparées. Comme $\frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable en $+\infty$, la conclusion suit.

2. Par un changement de variables en coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on a
$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^2}{x^2+y^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr = \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Il suffit d'appliquer la formule de décalage en temps du cours à la transformée de Fourier de la gaussienne (donnée par le tableau pour $a = \pi$). On trouve $\widehat{e^{-\pi(t-4)^2}} = e^{-\pi(8i\xi+\xi^2)}$.

4. Tracer avec un ordinateur sachant que $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi) = \pi e^{-2\pi|\xi|}$.

5. Le signal dont on demande de calculer la transformée de Fourier est la somme de 2 créneaux centrés. Sa transformée est donc la somme de 2 sinus cardinaux de fréquences différentes : $\mathcal{F}(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}]} + \mathbb{1}_{[-\frac{2}{\pi},\frac{2}{\pi}]})(\xi) = \frac{2}{\pi}\mathrm{sinc}(\xi) + \frac{4}{\pi}\mathrm{sinc}(4\xi) = \frac{2}{\pi\xi}\sin(3\xi)\cos(\xi)$ en utlisant les formules de trigonométrie usuelles.

6. D'après la question précédente, la transformée de Fourier existe dans $L^1(\mathbb{R})$ et est réelle car c'est la transformée d'une fonction paire. En particulier c'est une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini. D'après 4, c'est un produit amorti de cosinus et sinus (qui n'est pas toujours positif) ; il n'y a qu'un seul signal qui satisfait toutes ces propriétés.

7. Dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, on a $\widehat{\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2}}(\xi) = \left(\widehat{\frac{1}{1+x^2}}\right)^2(\xi) = (\pi e^{-2\pi|\xi|})^2 = \pi^2 e^{-4\pi|\xi|}$, en calculant $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}$ par inversion à l'aide du tableau. Par inversion, il suit $(\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2})(-x) = \pi^2 \widehat{e^{-4\pi|\xi|}}(x) = \frac{2\pi}{4+x^2}$ en utilisant encore le tableau. Finalement $\frac{1}{1+x^2} * \frac{1}{1+x^2} = \frac{2\pi}{4+(-x)^2} = \frac{2\pi}{4+x^2}$.

8. On a $j^2 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^2 = e^{i4\pi/3} = e^{-i2\pi/3} = \overline{j} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $\left(j^2\right)^{1/2} = \left(e^{-i2\pi/3}\right)^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\mathrm{Log}(e^{-i2\pi/3})} = e^{\frac{i}{2}(-\frac{2\pi}{3})} = e^{-i\pi/3}$. Il y avait donc 3 cases à cocher : la 2, 4 et 7.

9. D'après le cours, la fonction logarithme complexe principal est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ donc $\mathrm{Log}(1+z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus]-\infty,-1[$. Comme f a un pôle (d'ordre 30) en 0, la seule réponse possible pour l'holomorphie de f était donc que f est holomorphe $D(0,1) \setminus \{0\}$. De plus, $f(i)$ est bien défini et $f(i) = (\ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i))/i^{30}$ avec $\mathrm{Arg}(1+i) \in]-\pi,\pi[$ et $i^{30} = -1$. On obtient $f(i) = -\ln\sqrt{2} - i\pi/4$.

10. Comme $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, on a $e^{1/4} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7\times3} + \frac{1}{2^{11}\times3} + \cdots$ Pour évaluer ces termes, on remarque que $2^7 = 128$, $2^{10} = 1024 \approx 1000$, ce qui donne $e^{1/4} \approx 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128\times3} + \frac{1}{6000} \approx 1,25 + 0,03 + 0,003 + 0,0002 \approx 1,283$. On s'arrête à $n = 4$ car on remarque que les termes suivants ne modifieront presque plus le 3ème chiffre après la virgule. Il fallait donc cocher $1,284$.

11. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\})$ donc f est développable en série entière en $z = 0$. En utilisant les séries géométriques, on a :
$\frac{z}{4+z^2} = \frac{z}{4}\frac{1}{1+z^2/4} = \frac{z}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}z^{2n+1}$. Le rayon de convergence R sera le rayon du plus grand disque ouvert de centre 0 inclus dans $\mathbb{C} \setminus \{-2i, 2i\}$, soit $R = 2$. On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert avec le développement obtenu dans la question précédente ($\sum a_k z^k$ avec $a_{2n} = 0$ et $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2^{2n+2}}$).

12. De façon immédiate $h(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-\frac{z^2}{2})^n}{n!} = e^{-\frac{z^2}{2}}$ et $R = +\infty$. On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert pour le rayon de convergence.