Exercice : Faire le DSE de $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Sur $]-1,1[$ on a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f(x)$

➪ f est l'unique solution de l'EDO du 1er ordre linéaire

(problème de Cauchy) $\begin{cases} (1+x)y'(x) - \alpha y(x) = 0, & x \in]-1,1[, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

Cherchons une solution de l'EDO sous la forme d'une série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Le but est de trouver les conditions que doivent satisfaire les coefficients a_n et de prouver ensuite que la série entière obtenue à un rayon de convergence $R > 0$. Par unicité de la solution de l'EDO, on obtiendra le DSE de f.

En injectant dans l'EDO, on a

$$(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\text{➪ } (a_1 - \alpha a_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n)x^n = 0$$

Par identification

$y(0) = 1$ ➪ $a_0 = 1$,

$a_1 - \alpha a_0 = 0$ ➪ $a_1 = \alpha$,

$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$ ➪ (récurrence) $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}$.

Exercice : Faire le DSE de $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$. (suite)

En résumé $\boxed{a_0 = 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} = \binom{\alpha}{n}}$ coefficient binomial généralisé.

Avec la règle de d'Alembert, on montre facilement (exo) que la rayon de convergence de $y(x) = \sum a_n x^n$ est $R = 1$. Par unicité $y(x) = f(x)$ sur $]-1,1[$.

En conclusion, on obtient

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \text{ pour } x \in]-1,1[\text{ et } \alpha \in \mathbb{R}}$$: binôme de Newton généralisé [a]

a. énoncé par Isaac Newton (1642–1727, mathématicien et physicien anglais, figure emblématique des sciences) puis démontré par Leonhard Euler (1707–1783, mathématicien et physicien suisse, un des plus prolifiques) un siècle plus tard.

Ce DSE est à connaître car on en déduit plusieurs cas utiles :

pour $\alpha = 1$ on retrouve $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots, \quad R = 1}$

pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots, \quad R = 1}$

Résolution d'une EDO à l'aide des séries entières

De façon plus systématique que dans l'exercice précédent, on peut chercher des solutions d'EDO linéaires à coefficients polynomiaux sous la forme de séries entières. [1]

Exercice : Chercher une solution DSE de $x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$

On est en présence d'une EDO du 2nd ordre linéaire. Mais les coefficients n'étant pas constants, on n'a pas de formule. On cherche $y(x)$ sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. En injectant dans l'EDO, on a :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)na_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n-1)n + 4n + 2)a_n x^n.$$

Comme les coefficients de la série entière obtenue doivent être ceux de $\exp x$, par identification : $\forall n \in \mathbb{N}$, $((n-1)n + 4n + 2)a_n = (n+1)(n+2)a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_n = \frac{1}{(n+2)!}$.

D'où $R = +\infty$ et $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

1. c'est par exemple intéressant pour les EDO du 2nd ordre linéaires à coefficients non constants pour lesquels on n'a pas de formule pour les solutions de l'équation homogène.